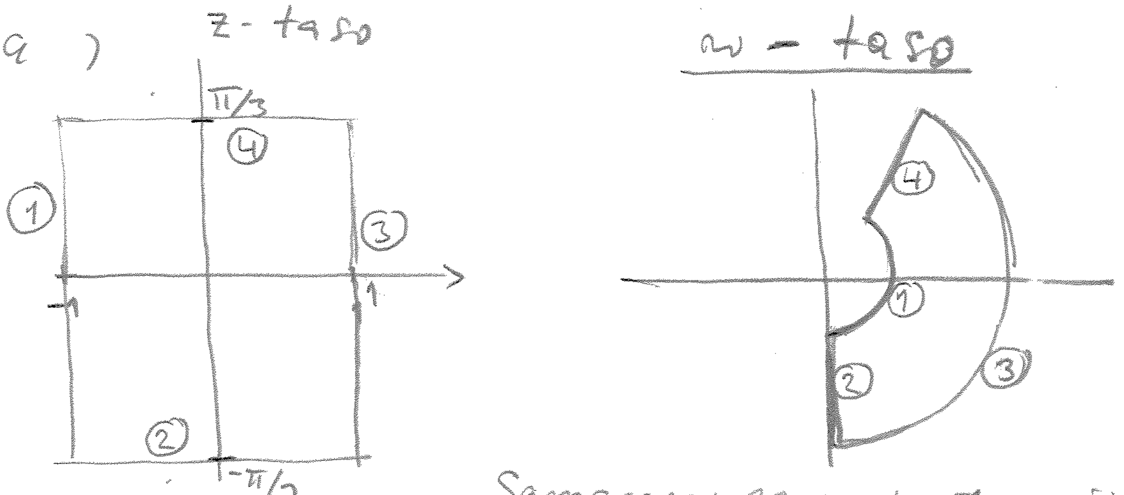
Mat-1.433/443, K3/P3 tentti 30.1.2006
Ratkaisut, HA

1) (a)




Samannumeroiset viivat vastaavat toisiaan.

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$.

(b) $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$.

Tarkistetaan Cauchy-Riemannin (CR) yhtälöt: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$:

$u_x(x,y) = e^x \cos y$, $v_y(x,y) = e^x \cos y$.
$u_y(x,y) = -e^x \sin y$, $v_x(x,y) = e^x \sin y$.

Siispä todellakin $u_x(x,y) = v_y(x,y)$
$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

kaikissa tason pisteissä $z = x+iy (=(x,y))$.
Koska osittaisderivaatat jatkuvat, seuraa tästä, että $f$ on derivoituva koko tasossa.

<u>Derivaatta</u>: $\underline{f'(z)} = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$
$= e^x \cos y + i e^x \sin y = \underline{e^z}$, $z = x+iy$.

2) $y'' + 5y' + 6y = r(t)$, $y(0) = 0$
$y'(0) = 0$,

$r(t) = 2(u(t) - u(t-4))$

$\mathcal{L}$; muunnetaan, merk. $Y = \mathcal{L}y$

$\underbrace{(s^2 + 5s + 6)}_{(s+2)(s+3)} Y = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{2}{s}(1 - e^{-4s})$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+3)}(1 - e^{-4s})$$

Osamurto: $\frac{2}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$

Kerr. s:llä, sij. $s = 0 \Rightarrow \frac{2}{2 \cdot 3} = A$; $A = \frac{1}{3}$

— " — $(s+2)$:lla, sij. $s = -2 \Rightarrow \frac{2}{(-2) \cdot 1} = B$; $B = -1$

— " — $(s+3)$:lla, sij. $s = -3 \Rightarrow \frac{2}{(-3)(-1)} = C$; $C = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{3s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+3}\right)}_{\downarrow\, \mathcal{L}^{-1}}(1 - e^{-4s})$$

$$\frac{1}{3} - e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{3} - e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} - u(t-4)\left(\frac{1}{3} - e^{-2(t-4)} + \frac{2}{3}e^{-3(t-4)}\right)}$$

3) $P = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.1 \\ 0.09 & 0.9 \end{bmatrix}$

(a) $\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.91-\lambda & 0.1 \\ 0.09 & 0.9-\lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - 1.81\lambda + 0.81$.

Tällaisella matriisilla ($p_{ij} \geq 0$, sarakesummat $= 1$) on aina ominaisarvona 1. Toinen on siten 0.81. (Nämä paistavat päälle muutenkin, vaikka tuo 1-tieto ei olisikaan hallussa. Toki voidaan aina käyttää 2. asteen yhtälön ratk. kaavaakin.)

Siis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.81$.

<u>Arvoa $\lambda_1 = 1$ vast. om. vekt.</u>:

$$\underbrace{(0.91 - 1)}_{-0.09} x_1 + 0.1\, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 0.9 x_1$$

Lasketaanpa samantien sellainen, jolle $x_1 + x_2 = 100$.

$$\Rightarrow \quad 1.9\, x_1 = 100 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 52.632$$

$$x_2 = 0.9\, x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 47.368$$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 52.632 \\ 47.368 \end{bmatrix}$ (Tässä kohdassa kelpaa miten tahansa normeerattu vektori.)

<u>Ominaisvektorit ovat LRT, koska $\lambda_1 \neq \lambda_2$</u>.

3b) Esitetään alkupiste $\vec{x}_0$ kannan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ avulla:

$$\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

$$\vec{x}_1 = P\vec{x}_0 = c_1\underbrace{P\vec{v}_1}_{\lambda_1\vec{v}_1} + c_2\underbrace{P\vec{v}_2}_{\lambda_2\vec{v}_2} = c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2$$

$$\vec{x}_2 = P\vec{x}_1 = c_1\lambda_1^2\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^2\vec{v}_2 .$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_k = P\vec{x}_{k-1} = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 .$$

$$= c_1\vec{v}_1 + c_2\underbrace{0.81^k}_{\to 0,\ \text{kun } k\to\infty}\vec{v}_2$$

Siis $\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k = c_1\vec{v}_1$.

(c) Määrätään $c_1$ siten, että vektorin $c_1\vec{v}_1$ komponenttien summa $= 100$.
Edellä jo normeerattiin näin, joten $c_1 = 1$
ja $\vec{x}_\infty = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 52.632 \\ 47.368 \end{bmatrix}$

[Jos olisi (a)-kohdassa otettu vaikka $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$, niin kerrottaisiin

luvulla $\frac{100}{1+0.9} = \frac{100}{1.9}$.]

(d) Tehtävä oli todella tehty ennen vaaleja. Matriisi P oli täysin "hatusta temmaistu". Jos sanamuotoa ei lue turhan tarkkaan, niin tällä "tieteellisellä metodilla" saatiin käsittämättömän hyvä tulos!! ☺ :-)

4) $\vec{y}' = A\vec{y}$ , $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)(4-\lambda) + 5 =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda = -1 \text{ tai } \lambda = 3$$

Kun ominaisvektorit lasketaan, saadaan:

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\lambda_1 = -1)$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(\lambda_2 = 3)$

yl. ratk:

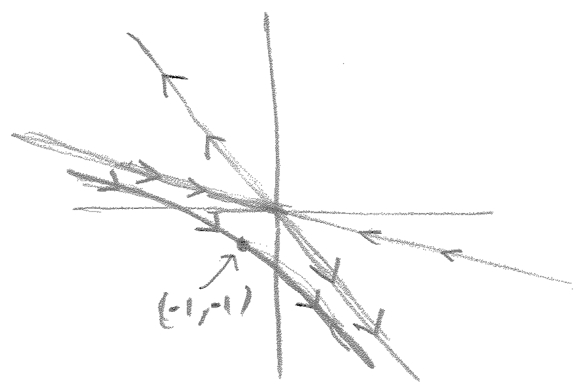
$$\vec{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Alkuehto: $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$

$$c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -5c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

AA - ratk: $\vec{y}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$




Esim. $\vec{y}(0.5) = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -6.4 \end{bmatrix}$

$\vec{y}(-1) = \begin{bmatrix} -6.7 \\ 1.3 \end{bmatrix}$

(Nämä siis perruskoordinaatistossa.)