Tentti 5.6.2006

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Funktio $f(z) = \frac{z-1}{z+\mathrm{i}}$ kuvaa ympyrät (ja suorat) ympyröille tai suorille. Määritä yksikköympyrän kuva kuvauksessa f eli määritä joukko $\{\, w \mid w = f(z),\ |z| = 1 \,\}$ laskemalla arvot $f(\mathrm{i})$, $f(1)$ ja $f(-1)$ ja päättelemällä mikä ympyrä tai suora kulkee näiden pisteiden kautta.

Ratkaisu: Suora lasku antaa

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2},\\
f(1) &= \frac{1-1}{1+\mathrm{i}} = 0,\\
f(-1) &= \frac{-1-1}{-1+\mathrm{i}} = \frac{(-2)(-1-\mathrm{i})}{1+1} = 1+\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Nähdään, että kaikki pisteet ovat origon ja pisteen $1+\mathrm{i}$ kautta kulkevalla suoralla, eli tämä suora (jonka yhtälö voidaan myös kirjoittaa muodossa Re z = Im z) on yksikköympyrän kuva kuvauksessa f.

---

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ käyttäen Laplace muunnosta.

Ratkaisu: Olkoon funktion $y(t)$ Laplace-muunnos $Y(s)$. Kun yhtälön molemmilta puolilta otetaan Laplace-muunnos niin saadaan,

$$
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = \frac{2}{s+1},
$$

josta seuraa, että

$$
Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+4s+5)} + \frac{2s+7}{s^2+4s+5}.
$$

Koska polynomin s^2+4s+5 nollakohdat $-2 \pm \mathrm{i}$ ovat kompleksiset haetaan seuraava osamurtokehitelmä:

$$
\frac{2}{(s+1)(s^2+4s+5)} + \frac{2s+7}{s^2+4s+5} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}.
$$

Jos tämän yhtälön molemmat puolet kerrotaan lausekkeella $s+1$ ja sitten valitaan $s=-1$ niin saadaan $\frac{2}{(-1)^2+4(-1)+5}+0=A+0$ eli $A=1$. Silloin

$$\begin{aligned}\frac{Bs+C}{s^2+4s+5} = \frac{2}{(s+1)(s^2+4s+5)} + \frac{2s+7}{s^2+4s+5} - \frac{1}{s+1} \\ = \frac{2-s^2-4s-5}{(s+1)(s^2+4s+5)} + \frac{2s+7}{s^2+4s+5} \\ = -\frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s^2+4s+5)} + \frac{2s+7}{s^2+4s+5} = \frac{s+4}{s^2+4s+5},\end{aligned}$$

joten $B=1$ ja $C=4$. Koska

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+4}{s^2+4s+5} = \frac{1}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1},$$

niin nähdään taulukoista, että

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}\cos(t) + 2\mathrm{e}^{-2t}\sin(t).$$

---

3. Määritä matriisi P siten, että PX on vektorin X kohtisuora projektio vektoreiden $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ virittämälle tasolle. (Kohtisuora projektio matriisin A pystysarakkeiden virittämälle avaruudelle saadaan jollakin seuraavista lausekkeista: $A(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}$, $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ tai $A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A$.)

Ratkaisu: Tässä tapauksessa matriisi A on $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$. Projektiomatriisin täytyy olla tyyppiä 3×3 ja koska A on tyyppiä 3×2 niin todetaan, että annetuista vaihtoehdoista ainoastaan $A(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}$ tai $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ voivat tulla kysymykseen. Lisäksi todetaan, että AA^{T} (ja myös den käänteismatriisi) on tyyppiä 3×3 joten matriisitulo $A(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}$ ei ole määritelty ja ainoaksi vaihtoehdoksi jää $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Nyt

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

jolloin

$$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 3\end{bmatrix},$$

ja

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

4.

(a) Kirjoita differentiaaliyhtälö $y''(t) + y'(t)y(t) - y(t)^2 = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ensimmisen kertaluvun differentiaaliyhtälösysteeminä.

(b) Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi $y_1'(t) = y_2(t) - y_1(t)^2$, $y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) + t$, $y_1(0) = 1$,$y_2(0) = 2$, Eulerin parannetulla menetelmällä laskemalla yski askel askelpituudella $h = 0.1$. Eulerin parannettu (eli Heunin) menetelmä on tunnetusti sellainen jossa lasketaan

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(t_0, Y_0 \\ K_2 &= hF(t_0 + ?, Y_0 + ?) \\ Y_1 &= Y_0 + \frac{1}{?}(K_1 + K_2), \end{aligned}$$

missä ?-merkit on korvattava sopivilla lausekkeilla.

Ratkaisu: (a) Merkitään $u(t) = y'(t)$ jolloin $u'(t) = y''(t) = t - y'(t)y(t) + y(t)^2 = t - u(t)y(t) + y(t)^2$ ja yhtälösysteemiksi tulee

$$\begin{aligned} y'(t) &= u(t), \\ u'(t) &= t - u(t)y(t) + y(t)^2. \end{aligned}$$

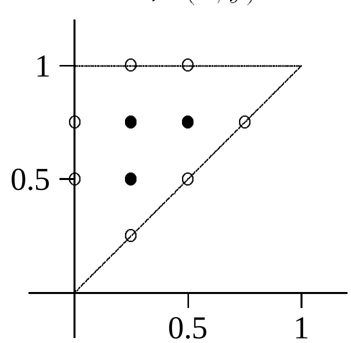
(b) Kirjoitetaan systeemi muodossa $Y'(t) = F(t, Y(t))$, $Y(0) = Y_0$. Koska $t_0 = 0$, $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sekä $h = 0.1$ niin saamme Eulerin parannetulla menetelmällä

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(t_0, Y_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} \\ K_2 &= hF(t_0 + h, Y_0 + K_1) = \begin{bmatrix} 0.109 \\ 0.35 \end{bmatrix} \\ Y_1 &= Y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \begin{bmatrix} 1.1045 \\ 2.325 \end{bmatrix} \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Nyt on siis saatu $Y(0.1) \approx \begin{bmatrix} 1.1045 \\ 2.325 \end{bmatrix}$.

---

5. Määritä ne yhtälöt, jotka saadaan kun yhtälöön $-\Delta u = f$ sovelletaan differenssiapproksimaatiota joukossa $\Omega = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1 \}$ kun $\Delta x = \Delta y = h = 0.25$ ja kun $f(x, y) = 16(x - y)$ ja $u(x, y) = 0$ kun $x = 0$, $u(x, y) = 1$ kun $y = 1$ ja $u(x, y) = x$ kun $x = y$.



Ratkaisu: Olkoon $U(j,k)$ ratkaisun $u(jh,kh)$ approksimaatio. Pisteissä $(h,2h)$, $(h,3h)$ ja $(2h,3h)$ saamme differenssiapproksimaatiosta seuraavat yhtälöt:

$$4U(1,2) - U(1,3) - U(1,1) - U(2,2) - U(0,2) = h^2 f(h,2h),$$
$$4U(1,3) - U(1,4) - U(1,2) - U(2,3) - U(0,3) = h^2 f(h,3h),$$
$$4U(2,3) - U(2,4) - U(2,2) - U(3,3) - U(1,3) = h^2 f(2h,3h).$$

Nyt $f(x,y) = 16(x-y)$, $U(0,2) = U(0,3) = 0$, $U(1,4) = U(2,4) = 1$ ja $U(1,1) = 0.25$, $U(2,2) = 0.5$ ja $U(3,3) = 0.75$. Yhtälösysteemiksi tulee näin ollen (matriisimuodossa)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(1,2) \\ U(1,3) \\ U(2,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$
