TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3
Tentti 5.6.2006

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Funktio $f(z) = \frac{z-1}{z+\mathrm{i}}$ kuvaa ympyrät (ja suorat) ympyröille tai suorille. Määritä yksikköympyrän kuva kuvauksessa f eli määritä joukko $\{\, w \mid w = f(z),\ |z| = 1 \,\}$ laskemalla arvot $f(\mathrm{i})$, $f(1)$ ja $f(-1)$ ja päättelemällä mikä ympyrä tai suora kulkee näiden pisteiden kautta.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ käyttäen Laplace muunnosta.

3. Määritä matriisi P siten, että PX on vektorin X kohtisuora projektio vektoreiden $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ virittämälle tasolle. (Kohtisuora projektio matriisin A pystysarakkeiden virittämälle avaruudelle saadaan jollakin seuraavista lausekkeista: $A(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}$, $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ tai $A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A$.)

4.

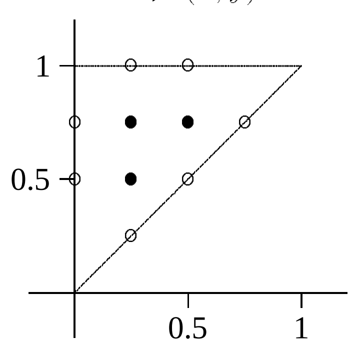
(a) Kirjoita differentiaaliyhtälö $y''(t) + y'(t)y(t) - y(t)^2 = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ensimmisen kertaluvun differentiaaliyhtälösysteeminä.

(b) Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi $y_1'(t) = y_2(t) - y_1(t)^2$, $y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) + t$, $y_1(0) = 1$,$y_2(0) = 2$, Eulerin parannetulla menetelmällä laskemalla yski askel askelpituudella $h = 0.1$. Eulerin parannettu (eli Heunin) menetelmä on tunnetusti sellainen jossa lasketaan

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(t_0, Y_0 \\ K_2 &= hF(t_0+?, Y_0+?) \\ Y_1 &= Y_0 + \frac{1}{?}(K_1 + K_2), \end{aligned}$$

missä ?-merkit on korvattava sopivilla lausekkeilla.

5. Määritä ne yhtälöt, jotka saadaan kun yhtälöön $-\Delta u = f$ sovelletaan differenssiapproksimaatiota joukossa $\Omega = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le y \le 1\,\}$ kun $\Delta x = \Delta y = h = 0.25$ ja kun $f(x,y) = 16(x-y)$ ja $u(x,y) = 0$ kun $x = 0$, $u(x,y) = 1$ kun $y = 1$ ja $u(x,y) = x$ kun $x = y$.



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
\mathcal{L}(1) &= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}(t^k) &= \frac{k!}{s^{k+1}} \\
\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) &= \frac{1}{s-a} \\
\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{s}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t) &= s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1} f(0) \\
\mathcal{L}(-t f(t)) &= F'(s) \\
\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) &= F(s-a) \\
\mathcal{L}(u(t-a) f(t-a)) &= \mathrm{e}^{-as} F(s), \quad a \geq 0
\end{aligned}
$$

Osamurtokehitelmä

$F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, missä P:n aste on pienempi kuin Q:n aste

Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$ otetaan kehitelmään termi $\dfrac{A}{s-a}$

Jos $Q(s)$:llä on tekijä $(s-a)^2$ otetaan kehitelmään termit $\dfrac{A_1}{s-a} + \dfrac{A_1}{(s-a)^2}$