TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3
Tentti 8.4.2006

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 9t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$ käyttäen Laplace-muunnosta.

Ratkaisu: Olkoon funktion $y(t)$ Laplace-muunnos $Y(s)$. Silloin funktioiden $y'(t)$ ja $y''(t)$ Laplace-muunnokset ovat $sY(s) - y(0)$ ja $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$. Lisäksi funktion $9t$ muunnos on $\frac{9}{s^2}$. Jos nyt otetatan Laplace-muunnos yhtälön molemmilta puolilta niin saamme

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = \frac{9}{s^2},$$

ja kun tähän sijoitetaan alkuarvot tuloksena on $(s^2 + 4s + 3)Y(s) + 5 = \frac{9}{s^2}$ eli

$$Y(s) = \frac{9 - 5s^2}{(s^2 + 4s + 3)s^2}.$$

Koska polynomin $s^2 + 4s + 3$ nollakohdat ovat -1 ja -3 niin voimme kirjoittaa

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2}.$$

Luvun A laskemiseksi kerrotaan lausekkeella $s + 1$ ja sitten annetaan $s \to -1$. Tästä saadaan

$$A = \lim_{s\to-1} \frac{(s+1)(9-5s^2)}{(s+1)(s+3)s^2} = 2.$$

Samalla tavalla saamme

$$B = \lim_{s\to-3} \frac{(s+1)(9-5s^2)}{(s+1)(s+3)s^2} = 2,$$

$$C = \lim_{s\to0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{s^2(9-5s^2)}{(s+1)(s+3)s^2} = \lim_{s\to0} \frac{(-10s)(s^2+4s+3) - (9-5s^2)(2s+4)}{(s^2+4s+3)^2} = -\frac{36}{9} = -4,$$

$$D = \lim_{s\to0} \frac{s^2(9-5s^2)}{(s+1)(s+3)s^2} = 3,$$

Näin ollen

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+3} - \frac{4}{s} + \frac{3}{s^2}.$$

Ottamalla käänteismuunnos taulukkojen avulla saamme

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-3t} - 4 + 3t.$$

---

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit. Löytyykö matriisi W siten, että WAW^{-1} on lävistäjämatriisi?

Ratkaisu: Lasketaan

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix}(11-\lambda) & 12\\ -6 & (-6-\lambda)\end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \begin{cases}3,\\ 2,\end{cases}$$

joten nähdään, että ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 2$.

Seuraavaksi lasketaan ominaisarvoon $\lambda_1 = 3$ liittyvä ominaisvektori, eli ratkaistaan yhtälö $(A-3I)X = 0$. Gaussin menetelmällä saadaan,

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}8 & 12 & 0\\ -6 & -9 & 0\end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{3}{4}r_1\\ \sim &\begin{bmatrix}8 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että jos valitaan $x_2 = 1$ niin x_1:n ratkaisuksi yhtälöstä $8x_1 + 12 = 0$ saadaan $x_1 = -\frac{3}{2}$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $X_1 = [-\frac{3}{2}, 1]^{\mathrm{T}}$. Ominaisarvoon $\lambda_2 = 2$ liittyvä ominaisvektori saadaan samalla tavalla eli ratkaistaan yhtälö $(A-2I)X = 0$. Nyt saadaan,

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}9 & 12 & 0\\ -6 & -8 & 0\end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{2}{3}r_1\\ \sim &\begin{bmatrix}9 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jos nyt valitaan $x_2 = 1$ niin x_1:n ratkaisuksi yhtälöstä $9x_1 + 12 = 0$ tulee $x_1 = -\frac{4}{3}$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $X_2 = [-\frac{4}{3}, 1]^{\mathrm{T}}$.

Jos muodostamme matriisin V siten, että X_1 on ensimmäisenä sarakkeena ja X_2 on toisena niin $V^{-1}AV$ on lävistäjämatriisi joten voimme valita $W = V^{-1}$.

3.

(a) Löytyykö kaksi 2×2 matriisia A ja B siten, että pätee $AB = 0$ mutta $BA \neq 0$. (Anna esimerkki jos löytyy, muussa tapauksessa osoita, että se on mahdotonta.)

(b) Jos P on sellainen neliömatriisi, että $P^2 = P$. niin mitä voidaan sanoa P:n ominaisarvoista.

Ratkaisu: (a) Esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

(b) Jos λ on P:n ominaisarvo ja X on vastaava ominaisvektori, niin $PX = \lambda X$ jolloin toisaalta

$$P^2X = P(\lambda X) = \lambda PX = \lambda^2 X,$$

ja toisaalta

$$P^2X = PX = \lambda X.$$

Koska $X \neq 0$ niin tästä seuraa, että $\lambda^2 = \lambda$ eli
$lambda - 0$ tai $\lambda = 1$

---

4. Onko jokin (tai molemmat) pisteistä $(1,1)$ ja $(-1,1)$ differentiaaliyhtälösysteemin

$$x'(t) = x(t)^2 y(t) - y(t)^3,$$
$$y'(t) = x(t)y(t) + x(t) - 2y(t)^2,$$

stabiili kriittinen piste. Perustele!

Ratkaisu: Olkoon

$$\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2y - y^3 \\ xy + x - 2y^2 \end{bmatrix},$$

jolloin yhtälösysteemi voidaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$. Nyt todetaan helposti, että

$$\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mutta} \quad \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

josta seuraa, että $(1,1)$ on kriittinen piste mutta $(-1,1)$ ei ole. Yksinkertainen lasku osoittaa, että

$$\mathbf{f}'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2xy & (x^2 - 3y^2) \\ (y+1) & (x - 4y) \end{bmatrix}.$$

Näin ollen

$$\mathbf{f}'\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin karakteristinen yhtälö on

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (2-\lambda) & -2 \\ 2 & (-3-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

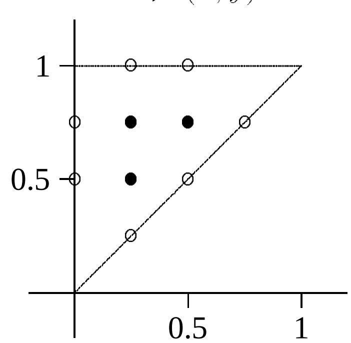
Ratkaisuksi saamme

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1, \\ -2. \end{cases}$$

Koska toinen ominaisarvoista on positiivinen niin $(1,1)$ ei ole stabiili.

---

5. Määritä ne yhtälöt, jotka saadaan kun yhtälöön $-\Delta u = f$ sovelletaan differenssiapproksimaatiota joukossa $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y \le 1\}$ kun $\Delta x = \Delta y = h = 0.25$ ja kun $f(x,y) = 16(x-y)$ ja $u(x,y) = 0$ kun $x = 0$, $u(x,y) = 1$ kun $y = 1$ ja $u(x,y) = x$ kun $x = y$.



Ratkaisu: Olkoon $U(j,k)$ ratkaisun $u(jh,kh)$ approksimaatio. Pisteissä $(h,2h)$, $(h,3h)$ ja $(2h,3h)$ saamme differenssiapproksimaatiosta seuraavat yhtälöt:

$$
\begin{aligned}
4U(1,2) - U(1,3) - U(1,1) - U(2,2) - U(0,2) &= h^2 f(h,2h),\\
4U(1,3) - U(1,4) - U(1,2) - U(2,3) - U(0,3) &= h^2 f(h,3h),\\
4U(2,3) - U(2,4) - U(2,2) - U(3,3) - U(1,3) &= h^2 f(2h,3h).
\end{aligned}
$$

Nyt $f(x,y) = 16(x-y)$, $U(0,2) = U(0,3) = 0$, $U(1,4) = U(2,4) = 1$ ja $U(1,1) = 0.25$, $U(2,2) = 0.5$ ja $U(3,3) = 0.75$. Yhtälösysteemiksi tulee näin ollen (matriisimuodossa)

$$
\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U(1,2) \\ U(1,3) \\ U(2,3) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}
$$
