TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3

Tentti 8.4.2006

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 9t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$ käyttäen Laplace-muunnosta.

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit. Löytyykö matriisi W siten, että WAW^{-1} on lävistäjämatriisi?

3.

(a) Löytyykö kaksi 2×2 matriisia A ja B siten, että pätee $AB = 0$ mutta $BA \neq 0$. (Anna esimerkki jos löytyy, muussa tapauksessa osoita, että se on mahdotonta.)

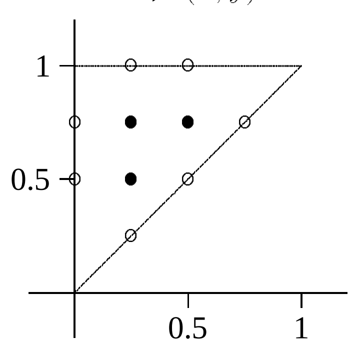
(b) Jos P on sellainen neliömatriisi, että $P^2 = P$. niin mitä voidaan sanoa P:n ominaisarvoista.

4. Onko jokin (tai molemmat) pisteistä $(1, 1)$ ja $(-1, 1)$ differentiaaliyhtälösysteemin

$$x'(t) = x(t)^2 y(t) - y(t)^3,$$
$$y'(t) = x(t)y(t) + x(t) - 2y(t)^2,$$

stabiili kriittinen piste. Perustele!

5. Määritä ne yhtälöt, jotka saadaan kun yhtälöön $-\Delta u = f$ sovelletaan differenssiapproksimaatiota joukossa $\Omega = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1 \}$ kun $\Delta x = \Delta y = h = 0.25$ ja kun $f(x, y) = 16(x - y)$ ja $u(x, y) = 0$ kun $x = 0$, $u(x, y) = 1$ kun $y = 1$ ja $u(x, y) = x$ kun $x = y$.



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
\mathcal{L}(1) &= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}(t^k) &= \frac{k!}{s^{k+1}} \\
\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) &= \frac{1}{s-a} \\
\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{s}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t) &= s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1} f(0) \\
\mathcal{L}(-t f(t)) &= F'(s) \\
\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) &= F(s-a) \\
\mathcal{L}(u(t-a) f(t-a)) &= \mathrm{e}^{-as} F(s), \quad a \geq 0
\end{aligned}
$$

Osamurtokehitelmä

$F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, missä P:n aste on pienempi kuin Q:n aste

Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$ otetaan kehitelmään termi $\dfrac{A}{s-a}$

Jos $Q(s)$:llä on tekijä $(s-a)^2$ otetaan kehitelmään termit $\dfrac{A_1}{s-a} + \dfrac{A_1}{(s-a)^2}$