TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3
Tentti 29.8.2006

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Olkoon $w = 3 + \mathrm{i}\,3$. Määritä yhtälön $\mathrm{e}^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

(b) Onko funktio $f(z) = \frac{1}{1+|z|}$ analyyttinen joukossa $\mathbb{C}$. Perustele!

Ratkaisu: (a) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$, ja w:n argumentti on $\arctan(\frac{3}{3}) = \frac{\pi}{4}$. Jos $z = a + \mathrm{i}b$ niin $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$ ja $\arg(\mathrm{e}^z) = b$, joten jos nyt $\mathrm{e}^z = w$ niin $\mathrm{e}^a = 3\sqrt{2}$ ja $b = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $a = \ln(3\sqrt{2})$ jolloin haetut ratkaisut ovat

$$z = \ln(3\sqrt{2}) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Koska $f(z) \neq 0$ niin myös funktio $\frac{1}{f(z)} - 1$ olisi analyyttinen jos f olisi analyyttinen. Mutta $\frac{1}{f(z)} - 1 = |z|$ ja tämä funktio ei tunnetusti ole analyyttinen (imaginaariosa on vakio 0 joten Cauchy-Riemannin yhtälöiden mukaan myös reaaliosan derivaatta x:n ja y:n suhteen pitäisi olla 0 ja näin ei ole asian laita).

2.

(a) Määritä funktion $F(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}$ Laplace-käänteismuunnos.

(b) Mistä nähdään, ettei funktio $G(s) = \dfrac{s}{\sin(s)+2}$ ole jonkin funktion g Laplace-muunnos, missä $\int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Ratkaisu: (a) Muodostetaan funktion osamurtokehitelmä

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}.$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet lausekkeella $s+2$ ja otetaan raja-arvo kun $s \to -2$ silloin saadaan

$$\frac{-2}{-2+3} = A + 0 \quad \Rightarrow \quad A = -2.$$

Seuraavaksi kerrotaan yhtälön molemmat puolet lausekkeella $s+3$ ja otetaan raja-arvo kun $s \to -3$ silloin saadaan

$$\frac{-3}{-3+2} = 0 + B \quad \Rightarrow \quad B = 3.$$

Näin ollen todetaan, että

$$F(s) = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3},$$

josta seuraa (lineaarisuuden, yksikäsitteisyyden ja taulukoiden nojalla), että F on funktion $-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}$ Laplace-muunnos.

(b) Jos $\int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ niin pätee

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}g(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Tässä tapauksessa pätee $\lim_{s\to\infty}\frac{s}{\sin(s)+2} = \infty$ joten G ei voi olla integroituvan funktion Laplace-muunnos.

3.

(a) Selitä, miten voidaan laskea A^n missä A on $m\times m$-matriisi ja n on iso luku, käyttäen hyväksi A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit (ja olettaen, että A:lla on m lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria).

(b) Oletetaan, että pätee $A = USV^{\mathrm{T}}$ missä U ja V ovat $m\times m$ ortogonaalisia matriiseja (eli $U^{\mathrm{T}}U = UU^{\mathrm{T}} = I$ jne) ja S on sellainen $(m\times m)$ lävistäjämatriisi, että $S_{ii} > 0$ kun $i = 1,\dots,n$ ja $S_{ii} = 0$ kun $i = n+1,\dots,m$. Selitä, miksi matriisin U ensimmäiset n pystysaraketta muodostavat avaruuden $\{\, AX \mid X \text{ on } m\times 1\text{-pystyvektori}\,\}$ kannan.

Ratkaisu: (a) Muodostetaan ominaisvektoreista matriisi V (niin, että ominaisvektorit ovat pystysarakkeina) ja ominaisarvoista (samassa järjetsyksessä otettuina) lävistäjämatriisi D. Silloin pätee $A = VDV^{-1}$ ja koska $VV^{-1} = I$ saadaan $A^n = VD^nV^{-1}$. Tämä on suhteellisen helposti laskettavissa koska D^n on lävstäjämatriisi, jonka lävistäjäelementit ovat ominaisarvot korotettuina potenssiin n.

(b) Jos X on mielivaltainen vektori niin $V^{\mathrm{T}}X$ on jokin vektori josta ei tiedetä kovinkaan paljon mutta $SV^{\mathrm{T}}X$ on vektori jonka ainoastaan n ensimmäistä komponenttia ovat nollasta poikkeavia. Näin ollen $USV^{\mathrm{T}}X$ on lineaarikombinaatio matriisin U pystysarakkeista $1,\dots,n$ eli nämä virittävät A:n kuva-avaruuden $\{\, AX \mid X \text{ on } m\times 1\text{-pystyvektori}\,\}$. Nämä vektorit muodostavat kannan koska ne ovat lisäksi lineaarisesti riippumattomia koska kaikki U:n pystysarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia koska U on kääntyvä (käänteismatriisi on transpoosi).

---

4. Onko $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ differentiaalisysteemin

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_2(t) - \sin(y_1(t)),\\ y_2'(t) &= 1 - y_2(t) - \mathrm{e}^{-y_1(t)}, \end{aligned}$$

asymptoottisesti stabiili vakioratkaisu (eli tasapainopiste)? Perustele!

Ratkaisu: Jos kirjoitamme $F\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}f_1(y_1,y_2)\\f_2(y_1,y_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2y_2 - \sin(y_1)\\1 - y_2 - \mathrm{e}^{-y_1}\end{bmatrix}$ niin nähdään ensin, että $F\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ joten $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ on todella vakioratkaisu ja lisäksi

$$F'\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_1,y_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_1,y_2)\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_1,y_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_1,y_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos(y_1) & 2\\ \mathrm{e}^{-y_1} & -1\end{bmatrix},$$

joten

$$F'\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Laskemme matriisin $F'\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)$ ominaisarvot ja koska karakteristinen yhtälä on

$$\det\left(F'\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)-\lambda I\right)=\det\left(\begin{bmatrix}(-1-\lambda) & 2\\ 1 & (-1-\lambda)\end{bmatrix}\right)=\lambda^2+2\lambda-1=0.$$

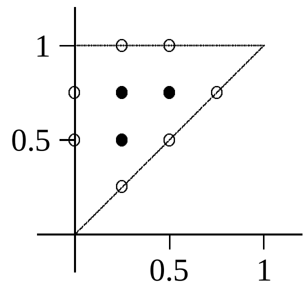
niin saamme ratkaisuiksi

$$\lambda=-1\pm\sqrt{2}.$$

Koska toisella ominaisarvolla on positiivinen reaaliosa niin todetaan, että $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ei ole stabiili eikä siten myöskään asymptoottisesti stabiili vakioratkaisu.

---

5. Määritä ne yhtälöt, jotka saadaan kun yhtälöön $-(u_{xx}+u_{yy})=f$ sovelletaan differenssiapproksimaatiota joukossa $\Omega=\{\,(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\,\}$ kun $\Delta x=\Delta y=h=0.25$ ja kun $f(x,y)=16(x-y)$ ja $u(x,y)=0$ kun $x=0$, $u(x,y)=1$ kun $y=1$ ja $u(x,y)=x$ kun $x=y$.



Ratkaisu: Olkoon $U(j,k)$ ratkaisun $u(jh,kh)$ approksimaatio. Pisteissä $(h,2h)$, $(h,3h)$ ja $(2h,3h)$ saamme differenssiapproksimaatiosta seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned}4U(1,2)-U(1,3)-U(1,1)-U(2,2)-U(0,2)&=h^2f(h,2h),\\4U(1,3)-U(1,4)-U(1,2)-U(2,3)-U(0,3)&=h^2f(h,3h),\\4U(2,3)-U(2,4)-U(2,2)-U(3,3)-U(1,3)&=h^2f(2h,3h).\end{aligned}$$

Nyt $f(x,y)=16(x-y)$, $U(0,2)=U(0,3)=0$, $U(1,4)=U(2,4)=1$ ja $U(1,1)=0.25$, $U(2,2)=0.5$ ja $U(3,3)=0.75$. Yhtälösysteemiksi tulee näin ollen (matriisimuodossa)

$$\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U(1,2)\\U(1,3)\\U(2,3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\2\end{bmatrix}$$
