

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
 Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1.

- (a) Olkoon $w = 3 + i3$. Määritä yhtälön $e^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.
 (b) Onko funktio $f(z) = \frac{1}{1+|z|}$ analyyttinen joukossa \mathbb{C} . Perustele!

2.

- (a) Määritä funktion $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$ Laplace-käänneismuunnos.
 (b) Mistä nähdään, ettei funktio $G(s) = \frac{s}{\sin(s)+2}$ ole jonkin funktion g Laplace-muunnos, missä $\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty$.

3.

- (a) Selitä, miten voidaan laskea A^n missä A on $m \times m$ -matriisi ja n on iso luku, käyttäen hyväksi A :n ominaisarvot ja ominaisvektorit (ja olettaen, että A :lla on m lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria).
 (b) Oletetaan, että pätee $A = USV^T$ missä U ja V ovat $m \times m$ ortogonaalisia matriiseja (eli $U^T U = U U^T = I$ jne) ja S on sellainen $(m \times m)$ lävistämämatriisi, että $S_{ii} > 0$ kun $i = 1, \dots, n$ ja $S_{ii} = 0$ kun $i = n+1, \dots, m$. Selitä, miksi matriisin U ensimmäiset n pystysaraketta muodostavat avaruuden $\{AX \mid X \text{ on } m \times 1\text{-pystyvektori}\}$ kannan.

4. Onko $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ differentiaalisysteemin

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_2(t) - \sin(y_1(t)), \\ y_2'(t) &= 1 - y_2(t) - e^{-y_1(t)}, \end{aligned}$$

asymptoottisesti stabiili vakioratkaisu (eli tasapainopiste)? Perustele!

5. Määritä ne yhtälöt, jotka saadaan kun yhtälöön $-(u_{xx} + u_{yy}) = f$ sovelletaan differenssiapproksimaatiota joukossa $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ kun $\Delta x = \Delta y = h = 0.25$ ja kun $f(x, y) = 16(x - y)$ ja $u(x, y) = 0$ kun $x = 0$, $u(x, y) = 1$ kun $y = 1$ ja $u(x, y) = x$ kun $x = y$.

