K3/P3 tentti 30.8.05 Ratkaisut HA

1) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$

$$= \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} - i \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Osoitettava

$z \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2 > 0$

CR: $\boxed{\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}}$

Ei muuta kuin derivoidaan:

$$u_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)1 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_y(x,y) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad // \text{ OK.}$$

(x:n ja y:n roolit vaihdetaan ja otetaan − merkki)

$$u_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x = -\frac{-y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u_y = -v_x .$$

Siis CR-yhtälöt ovat voimassa. Koska $x^2+y^2 > 0$, os. derivaatat ovat jatkuvat, joten CR-lause $\Rightarrow$ $f$ on derivoituva pisteessä $z = x+iy$ ($\neq 0$). Siten $f$ on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

// Derivaatta: $f'(z) = u_x + iv_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y-ix)^2}{|z|^4} = \ldots$ // ei kysytty!

Jätin tämän osan pois tehtävästä

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2\lambda_3 = 5$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 6$ $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$

(tai 2. asteen yhtälön ratk. kaavasta)

(a) Ominaisarvot $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, alg. kl. = 2.
$\lambda_3 = 5$, alg. kl. = 1.

(b) $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 1}$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow$ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

2 vapaata muuttujaa.

1) Val. esim. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $\Rightarrow$ $x_3 = -1$
$\Rightarrow$ $\vec{v}_1 = [0, 1, -1]^T$

2) Val. esim. $x_3 = 0$, $x_1 = 2$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$
$\Longrightarrow$ $\vec{v}_2 = [2, -1, 0]^T$

$\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ovat LRT, koska $\vec{v}_1$:llä ei voi virittää $\vec{v}_2$:ta, eikä $\vec{v}_2$:lla $\vec{v}_1$:tä.
(Pätee yleisesti: Jos on k vapaata muuttujaa, niin nolla-avaruuden dim = k, siksi ei ole välttämätöntä tässä erikseen perustella.)

Lasketaan $\underline{\lambda = 5}$ :ttä vastaava $\underline{\text{om. vekt.}}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

yksi vapaasti valittava, vaikka $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$.

Siis om. vektoriksi kelpaa $\vec{v}_3 = [0, 1, 1]^T$.

<u>Diagonalisoituvuus</u> seuraa siitä, että ominaisarvon $\lambda = 1$ sekä alg. että geom. kl yhtyvät. Koska om. arvo $\lambda = 5$ on yksinkertainen, niin alg. ja geom. kl $= 1$, tämä tiedetään jo etukäteen, tarvitsematta laskea vastaavaa om. vektoria.

Toki voidaan osoittaa laskemalla ominaisvektorien LRT, mutta se ei siis ole välttämätöntä.

(c) Diagonalisointiesitys : $A = VDV^{-1}$,

missä $\underline{V = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$, $\underline{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$.

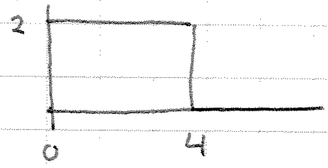
( Koska $V$:n sarakkeet LRT, $\exists V^{-1}$ )

Lasketaan $A$:n potensseja :

$$A^k = (VD\underbrace{V^{-1})(V}_{I}D\underbrace{V^{-1})\ldots}_{I}\ldots\underbrace{(V}_{I}DV^{-1}) = VD^kV^{-1}$$

Siis $\underline{A^{20} = VD^{20}V^{-1}} = \underline{V\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{20} \end{bmatrix}V^{-1}}$

3) $y'' + 5y' + 6y = r(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

$r(t) =$  $= 2(u(t) - u(t-4))$



L-muunnetaan, merk. $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

$$\Rightarrow s^2 Y + 5sY + 6Y = 2/s\,(1 - e^{-4s})$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s(s^2+5s+6)} = \frac{2}{s(s+2)(s+3)}$$

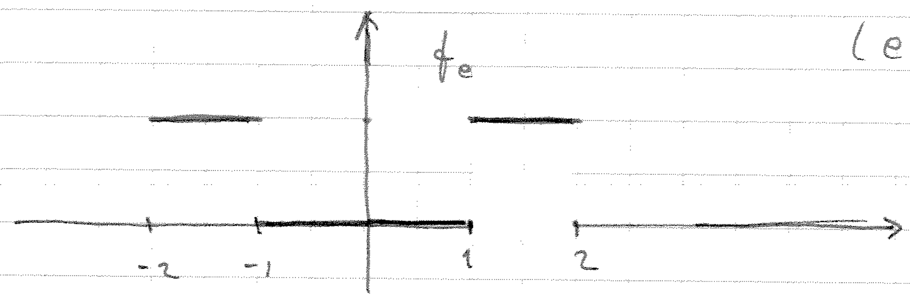
$$\begin{bmatrix} (-2)(-3) = 6 \\ -2-3 = -5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{6s} + \frac{2}{3(s+3)} - \frac{2}{2(s+2)}$$

[Osamurtohajotelmia esiintyy monissa malliratkaisuissa. Jätän nyt yksityiskohdat väliin.]

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} - e^{-2t} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3(t-4)} - e^{-2(t-4)}\right)u(t-4)}$$

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$  Merk $f_e$ = $f$:n parill. laajennus ($e$ = "even")





$$\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{2L}\int_{-2}^{2} \underbrace{f_e(x)\,dx}_{\text{parill.}} = \frac{1}{L}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\underline{L=2}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-2}^{2} \underbrace{f_e(x)\cos\frac{n\pi x}{L}}_{\text{parill}}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \qquad \underline{L=2}$$

$$= \int_{1}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\Big/_{1}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\Big(\underbrace{\sin n\pi}_{0} - \underbrace{\sin\frac{n\pi}{2}}_{1,\,0,\,-1,\,0,\,\dots}\Big)$$

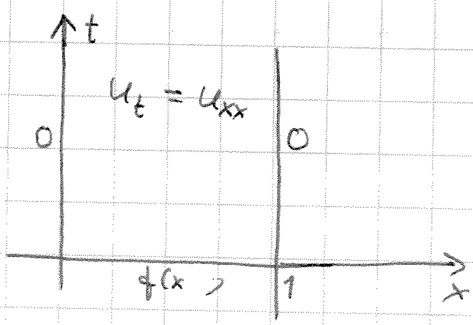
Koska $f_e$ on parillinen, $b_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(-\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2}\dots\Big)$$

[ Tähän saakka riittää ]

5)




$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x) =$$
$$= 4\sin\pi x - 0.5\sin 4\pi x + 0.1\sin 7\pi x$$

Yrite: $u(x,t) = F(x)G(t)$

$$u_{xx} = F''(x)G(t), \quad u_t = F(x)G'(t)$$

Oltava $u_{xx} = u_t \iff F''(x)G(t) = F(x)G'(t)$

$$\iff \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} \quad \forall (x,t)$$

Ainoa mahdollisuus: ∃ vakio (merk. $-p^2$)

s.e. $$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = -p^2 \quad \forall x, t.$$

(Vakion posit arvo tai 0 ei johda RE:t tot. ratkaisuun, paitsi 0 – ratk, joka ei totenda AE:a, ellei sekin ole 0, jolloin ei mitään tapahdu milloinkaan.)

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) + p^2 F(x) = 0 & (x\text{-yhtälö}) \\ G'(t) + p^2 G(t) = 0 & (t\text{-yhtälö}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = A\cos px + B\sin px$$

RE:t $\Rightarrow F(0) = F(1) = 0 \Rightarrow$

$A = 0 \Rightarrow \sin p\cdot 1 = 0 \Rightarrow p = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

$t$-yhtälö $\Rightarrow G(t) = Ce^{-p^2 t}$

$= Ce^{-n^2\pi^2 t}$

Funktiot $u_n(x,t) = \sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}$ tot. lämpöyhtälön ja RE:t, joten myös lin. komb. $\sum_n c_n u_n(x,t)$. Jotta vielä (AE) toteutuisi, on kertoimet $c_n$ määrättävä niin, että

$$\sum_n c_n u_n(x,0) = \underbrace{f(x)}_{} =$$

$4\sin\pi x - 0.5\sin 4\pi x + 0.1\sin 7\pi x$

$\Leftrightarrow c_1 = 4,\ c_4 = -0.5,\ c_7 = 0.1$, muut $c_n$:t $= 0$.

$$\Rightarrow u(x,t) = 4\sin\pi x\, e^{-\pi^2 t} - 0.5\sin 4\pi x\, e^{-16\pi^2 t} + 0.1\sin 7\pi x\, e^{-49\pi^2 t}$$