Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola

Tentti 30.8. 2005

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

Huomaa, että tehtäväpaperin lopussa on kaavakokoelma.

1. Olkoon $f(z) = \frac{1}{z}$. Osoita *Cauchy–Riemannin* yhtälöiden avulla, että f on analyyttinen koko kompleksitasossa, josta 0 on poistettu (eli joukossa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$).

2. Matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
karakteristinen polynomi $D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ voidaan kirjoittaa muotoon $D(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 5\right)$.

   (a) Määritä ominaisarvot (algebrallisine) kertalukuineen.

   (b) Määritä ominaisvektorit ja perustele matriisin diagonalisoituvuus.

   (c) Muodosta ja perustele matriisikaava, jolla lasket A^{20} siten, että aritmetiikkaa on olennaisesti vähemmän kuin suorassa matriisipotenssin laskussa. Käänteismatriisia ei tarvitse laskea.

3. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\,\frac{d}{dt}y(t) + 6\,y(t) = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
missä $r(t) = \begin{cases} 2, & \text{kun } 0 \le t < 4 \\ 0, & \text{kun } t \ge 4 \end{cases}$

4. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$. Piirrä f :n parillinen laajennus ja muodosta sen Fourier-sarja (eli f:n (4-jaksoinen) kosinisarja). Kirjoita erikseen näkyviin sarjan 3 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

5. Olkoon sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan pituus = 1 ja olkoot yksiköt valittu niin, että lämpöyhtälön vakio $c = 1$. Sauvan päät olkoot lämpötilassa 0 ja olkoon sauvan alkulämpötila
$$u(x,0) = f(x) = 4\sin(\pi x) - 0.5\sin(4\pi x) + 0.1\sin(7\pi x)$$
Johda muuttujanerottelulla ratkaisu $u(x,t)$.

   Suorita johtaminen vaiheittain. Riittää, kun päädyt ratkaisuun, joka toteuttaa reunaehdot ja alkuehdon, ei tarvitse välttämättä koluta “yhteisen vakion” merkkivalintoja, jos muistat/arvaat sen oikein. Muita ulkoa muistettuja oikaisuja (varsinkaan valmiiseen loppukaavaan sijoittamista) ei sitten sallitakaan.

   Vihje: Mieti, onko tarpeen kehittää jotain Fourier-sarjaksi, jos ei ole, niin älä tuhlaa aikaasi turhaan työhön.

Käännä

Kaavoja, menetelmiä

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$,

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$.