Uusintavälikoe 3

1) Tenttitehd. 4 , 4) Tenttitehd. 5

2) $\Theta'' + c\Theta' + k\Theta = 0$,

(a) Merk. $y_1 = \Theta$, $y_2 = \Theta' = y_1'$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 & = y_2 \\ y_2' = -k y_1 - c y_2 & = -y_1 - 0.5 y_2 \end{cases}$$

Huom! Tehtävästä on pudonnut sin pois.
Tarkoitus oli $\ldots + k \sin\Theta$.
Nyt meillä on lineaarinen syst.
alunperin.

Linearisointi (kaikesta huolimatta):

$$F(\vec{y}) = F\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 - 0.5 y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\vec{y}) \\ F_2(\vec{y}) \end{bmatrix}$$

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Linearisoitu: $\vec{y}' = J_F \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Saatiin sama alkuperäinen (tietysti).
Jos joku on tästä hämmentynyt, otetaan arvostelussa huomioon, kysymyksiä ei tietääkseni ole esitetty.

Lasketaan ominaisarvot $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Stabiili spiraali (stabiili, koska $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$)

Aivan kuten kuvassa

<u>Euler</u>: $\vec{y}^{(m+1)} = \vec{y}^{(m)} + hF(\vec{y}^{(m)})$, ts.

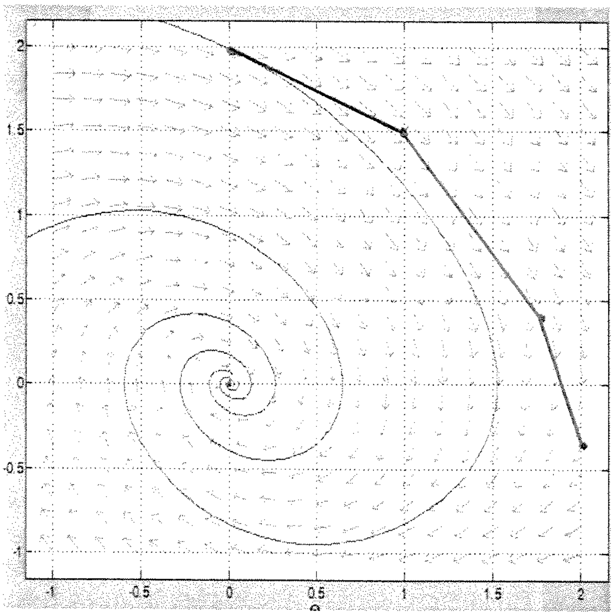
$$\vec{y}^{(m+1)} = \vec{y}^{(m)} + h\begin{bmatrix} y_2^{(m)} \\ -y_1^{(m)} - 0.5\, y_2^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \underbrace{h}_{0.5}\begin{bmatrix} 2 \\ \underbrace{0 - 0.5 \cdot 2}_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 0.5\begin{bmatrix} 1.5 \\ \underbrace{-1 - 0.5 \cdot 1.5}_{-1.75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

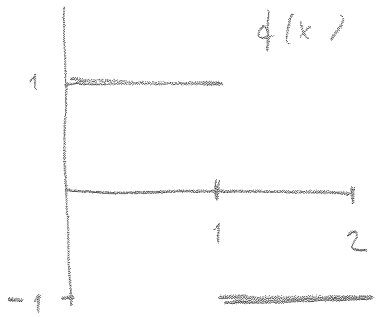
$$\vec{y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.625 \end{bmatrix} + 0.5\begin{bmatrix} 0.625 \\ -1.75 - 0.5 \cdot 0.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.063 \\ -0.406 \end{bmatrix}$$



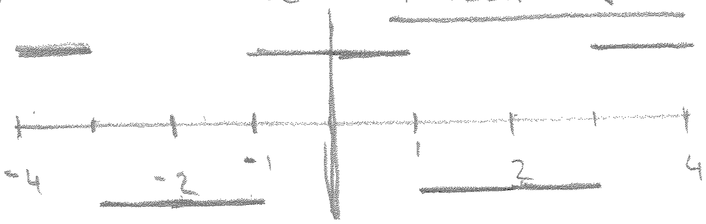
$$\text{Virhe} \approx \begin{bmatrix} 1.4 \\ -0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.1 \\ -0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Virhearvio on hiukan epämääräinen, koska kuvasta ei voi lukea aikaa. Suunnilleen lyhin etäisyys trajektorista on joka tapauksessa riittävän lähellä todellista.

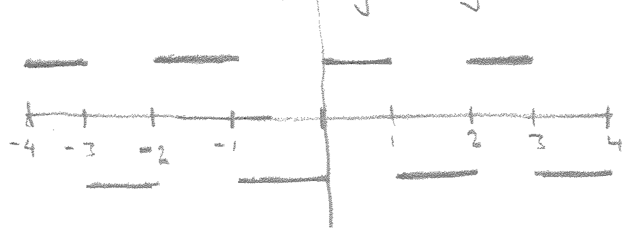
3)



a) f_e Parill. 4-jaks.



f_o Pariton 4-jaks. jatke



(Tämä sattuu olemaan jopa 2-jaksoinen, johtuen f:n antisymmetriasta pisteen (1,0) suhteen.)

b) Muodostettava siis f(x):n kosinisarja, eli pelkkiä a_n-kertoimia

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_e(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$L = 2$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\,dx + \int_1^2 (-1)\,dx\right) = 0$$

(Kuvastakin näkyy, että pinta-alat kumoutuvat)

$$a_n \underset{(n\geq 1)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_e(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\Big/_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2} - \Big/_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\right] = \ldots$$

$$= \frac{2}{m\pi}\left[\sin\frac{m\pi}{2} - \underbrace{\sin m\pi}_{0} + \sin\frac{m\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{4}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}$$

m	1	2	3	4	5 ...
$\sin\frac{m\pi}{2}$	1	0	-1	0	1 ...

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{2} + \dots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos\frac{(2k-1)x}{2}$$

```
> S:=(x,N)->4/Pi*add((-1)^(k-1)/(2*k-1)*cos((2*k-1)*Pi*x/2),k=1..N):
> S(x,3);
```

$$\frac{4\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\right)}{\pi}$$

```
> plot([S(x,4),S(x,20),S(x,100)],x=-2..2,color=[red,blue,green]);
```