Uusintavälikoe 2

1)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{(-3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & -8 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim}$$

$$\sim \operatorname{ref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tukisarakkeet

Nul(A): $\vec{x} \in \operatorname{Nul}(A) \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff$

$(\operatorname{ref}(A))\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

Vapaasti valittavat: $x_4 = s$, $x_3 = t$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5t - 4s \\ x_1 = 3t - 2s \end{cases}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3t - 2s \\ 5t - 4s \\ t \\ s \end{bmatrix}$$

Kanta: Valinta 1: $t = 0$, $s = 1$

— " — 2: $t = 1$, $s = 0$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ on kanta.

Col(A): Poimitaan tukisarakkeiden ilmaisemat sarakkeet alkuperäisestä A:sta

Col(A):n kanta: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Row(A):n kanta: $\{[0, 1, -5, 4]^T, [1, 0, -3, 2]^T\}$

Rangi = dim(Col(A)) (= dim(Row(A))) = 2

Nulliteetti = dim(N(A)) = 2

Niiden summa = 2 + 2 = 4 = n (sarakk. lkm.)

3) (a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 - 2 + 2 = 0$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -5 + 4 + 1 = 0$

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0 - 2 + 2 = 0$

Siis keskenään ortogonaaliset.

Koska mikään ei ole $\vec{0}$, ovat LRT ja siis $\mathbb{R}^3$:n kanta.

(b) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_3}{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3} \vec{v}_3$$

$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$ $\Rightarrow \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \frac{1}{3}$.

Vastaavasti muut $\Rightarrow$

$$\vec{v} = \frac{1}{3} \vec{v}_1 + \frac{2}{5} \vec{v}_2 - \frac{2}{15} \vec{v}_3$$

$\left(\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Teht. 2 = tenttitehtävä 3

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ Merk. $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ om. vekt.

$\lambda_2 = 2$, om. arvo

Ominaisvektoria $\vec{v}_1$ vastaava ominaisarvo:

Kerrotaan $A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{v}_1$.

Siis $\underline{\lambda_1 = -2}$.

Lasketaan arvoa $\underline{\lambda_2 = 2}$ vast. om. vekt. $\vec{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$ samat

$$(A - \lambda_2 I)\vec{x} = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$. Val. $x_3 = 1$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Miten lasketaan kolmas om. arvo ja -vektori.
Monta mahdollisuutta.
Lyhin lienee tämä: Koska A on symm., sen om. vektoreista voidaan muodostaa ortog. kanta. Etsitään vektori $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ siten, että $\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0$, $\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases}, \text{ val. } c = 1.$$

$\underline{\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$. Vastaava om. arvo saad. taas suoraan kertomalla

$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, siis $\underline{\lambda_3 = 4}$

Koska A symm., ja ominaisarvot erilliset, niin $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ on ortogonaalinen.
(Toki void. todeta suoraankin, tässähän on laskematta esim. $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -1 + 0 + 1 = 0$)

(b) Normeerataan vektorit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$; Merk. $\vec{u}_k = \dfrac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}$

$$U = \left[\vec{u}_1 \mid \vec{u}_2 \mid \vec{u}_3\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad \underline{A = UDU^T}$$

<u>Muita tapoja λ_3:n laskemiseen.</u>

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + c\lambda + \det A$$

tätä ei tarvitse tietää.

[Nähdään kehittämällä vaikka 1. sarakkeen suhteen]
(Viimeisenä saadaan asettamalla $\lambda = 0 \implies \det A$)

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (1+2+1)\lambda^2 + c\lambda + \det A$$

$$= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

$$= -\lambda^3 + (\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{0} + \lambda_3)\lambda^2 + c\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Siis $\lambda_3 = 1 + 2 + 1 = 4$. Tai: $\lambda_3 = \dfrac{\det A}{\lambda_1 \lambda_2} = -\dfrac{\det A}{4}$

Tässä joudutaan laskemaan $\det A$, joka saadaan kyllä helposti: $\begin{cases} \text{rivi } 2 \leftarrow \text{rivi } 1 + \text{rivi } 2 \\ \text{rivi } 3 \leftarrow \text{rivi } 3 - \text{rivi } 1 \end{cases}$.

Toki voidaan laskea pitkän kaavan kautta, onhan 4h aikaa!

Jos on lasketta om. arvot, niin lasketaan tavalliseen tapaan om. vektorit, jotka nyt ovat automaattisesti ortogonaaliset, koska kaikki ominaisarvot yksinkertaisia (ja A symm.).