Algebralliset ja geom. kertaluvut

$\underset{n \times n}{A}$

$$D(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots$$
$$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{p_k},$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$$

$p_j = M_{\lambda_j} = \lambda_j$:n alg. kertaluku.

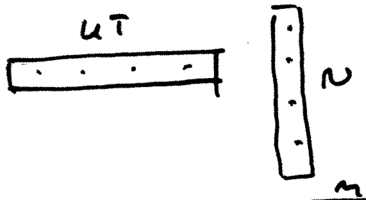
$E_{\lambda_j} = N(A - \lambda_j I)$

$\dim E_{\lambda_j} = m_{\lambda_j} = \lambda_j$:n geom. kertal.

<u>Aina</u> : $1 \leq m_{\lambda_j} \leq M_{\lambda_j}$

Sisätulo $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\mathbb{C}^n$:ssä

$\mathbb{R}^n$: $\quad \langle u, v \rangle = u \bullet v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^T v$



$\mathbb{C}^n$: $\quad \langle u, v \rangle = u \bullet v = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i = u^T \bar{v}$

$\|u\| = (\langle u, u \rangle)^{1/2}$

<u>Schwartzin ey</u>: $|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\|$

<u>Kolmioey</u>: $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$

Sisätulon perusominaisuudet:
(sisätuloavaruuden aksioomat)

(1) $\langle c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v}, \vec{w} \rangle = c_1 \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + c_2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
(Lineaarisuus 1. arg. suht.)

(2) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$

(3) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \ge 0$, $= 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Reaalisessa tapauksessa:
sisätulo on
"symmetrinen, positiivisesti definiitti bilineaarimuoto".

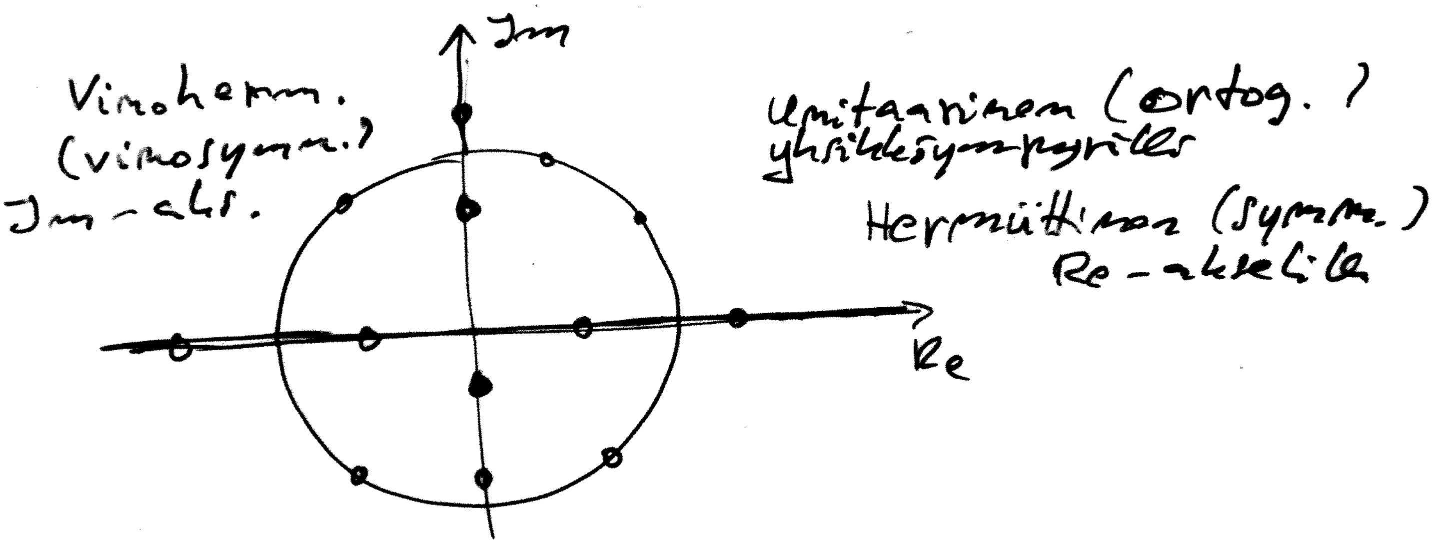
Matriisityyppejä [KRE 7.3, 7.4]

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
Symmetrinen $A^T = A$	Hermiittinen $\bar{A}^T = A$
Vinosymmetrinen $A^T = -A$	Vinohermiittinen $\bar{A}^T = -A$
Ortogonaalinen $A^T = A^{-1}$	Unitaarinen $\bar{A}^T = A^{-1}$

Joskus merk. $A^H = \bar{A}^T$
(Matlab : A' on $\bar{A}^T$)

Spektrit

Ominaisarvojen joukko = spektri $\subset \mathbb{C}$.



<u>Esim</u> [Lonez s. 733, Exa 32.5]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -1$$

A symm. $\quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0,$

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$

Siis $\quad A = VDV^{-1}$, missä

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$V^{-1} \neq V^T$, koska V:n sarakkeet eivät normeerattuja.

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Nyt: $\quad A = UDU^T$

Tämä siis voidaan tehdä aina symm? kuhan todistelemme.

Esimerkin opetus: Ortogonaalinen diagonalisointi ei synny automaattisesti.(*) (1) Normeeraus

(2) Entä jos $M_\lambda > 1$, täytyy oppia ortogonalisoimaan.

* Matlabill syntyy, koska norm