6.9 Laplace Transform: General Formulas

Formula	Name, Comments	Sec.
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Definition of Transform Inverse Transform	6.1
$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$	Linearity	6.1
$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \cdots$ $\cdots - f^{(n-1)}(0)$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$	Differentiation of Function → kerr. s: 115 Integration of Function → jaet. s: 115	6.2
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t)$	*s*-Shifting (1st Shifting Theorem)	6.3
$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)u(t - a)$	*t*-Shifting (2nd Shifting Theorem)	6.3
$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\tilde{s})\, d\tilde{s}$	Differentiation of Transform Integration of Transform	6.5
$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau$ $= \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$ $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$	Convolution	6.6
$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$	*f* Periodic with Period *p*	6.8

to 16.10.03

Pieni L-muunnostaulukko

KRE s. 254 (Vähän lyhennetty)

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$f(t)$	$F(s)$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Määr.: $$(\mathcal{L}\{f(t)\})(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

s-siirto: $$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a),$$
missä $F = \mathcal{L}f$

Esim $$\mathcal{L}\{t e^{-2t}\} = \left[\frac{1}{s^2}\right]_{s \leftarrow s+2} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Esim $$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\omega t\} = \left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]_{s \leftarrow s-\alpha} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\omega t\} = \left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]_{s \leftarrow s-\alpha} = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

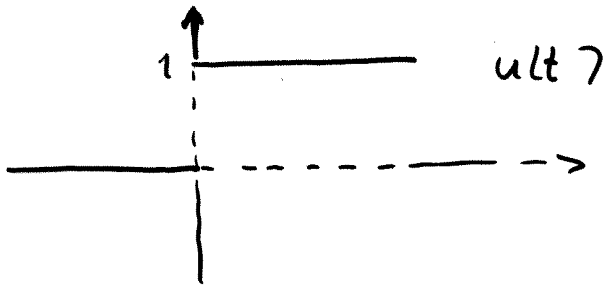
Usein hyödyllinen käänteismuunnoksessa

Esim $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+4}\right\} \ ?$$

expkl

$$|f(t)| \le Me^{\sigma t} \quad \forall t \ge 0$$

Yksikköaskelfunktio, Heavisiden funktio



$u(t) = H(t)$

Siirto pisteeseen a : $u(t-a)$

Matlab : $\boxed{\text{L/heaviside.m}}$

```
* >> u = inline('t>a', 't', 'a')
   % Ajattele t vektoriksi (järjestetyksi)
   % t > a palauttaa 1 niille koord., joilla t_i > a
                   —— " ——   0, —— " ——, joilla t_i ≤ a

   Esim:
>> t = linspace(-1, 5);
>> plot(t, u(t,1)-u(t,3))
% Periaatteessa hyvä ja elegantti, mutta
% hinkan tyhmää piirtää muutamaa
% janaa 100:lla pisteellä. Vain hyppy-
% kohdat tarkkaan.
>> tol = 0.001; a = 1; b = 3;
>> t = [-1, a-tol, a+tol, b-tol, b+tol, 5]
```


```
>> plot(t, u(t,a) - u(t,b))

*  Vielä parempi:
>> u = inline('t>0')
>> plot(t, u(t-1) - u(t-3))
>> % Jne, eli juuri samoin kuin
   % olemme tottuneet
```

Muutetaan

pe 24.10.03

Konvoluutio

Määr. $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$

$= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

Konvoluutiolause. Olk. f ja g $\mathcal{L}$-muuntuvia. Tällöin $f*g$ on $\mathcal{L}$-muuntuva ja

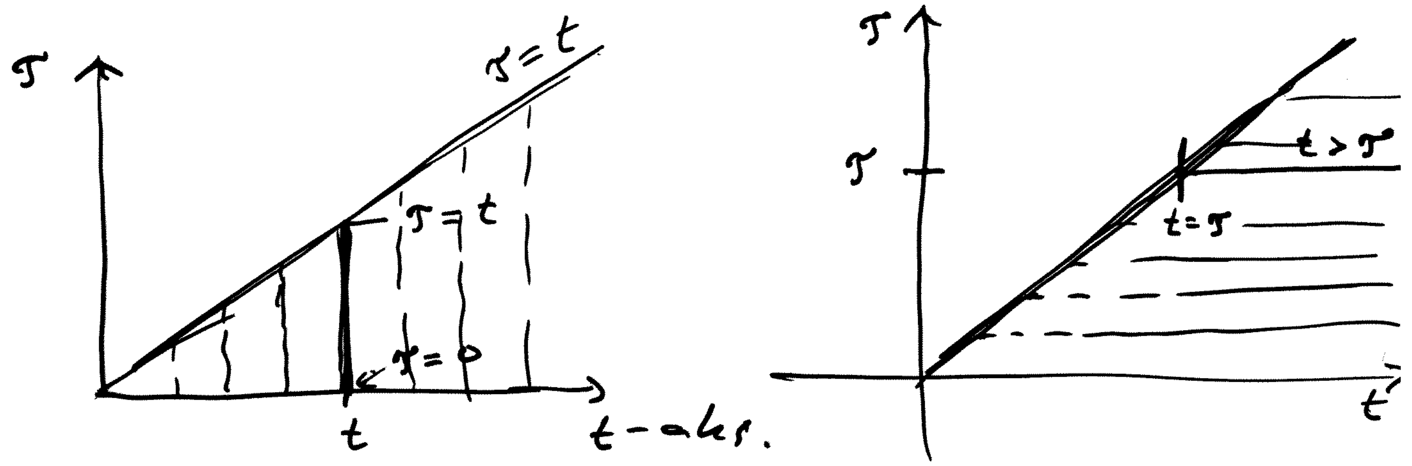
$$\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g).$$

Tod: $\mathcal{L}(f*g)(s) =$

$\int_0^\infty (f*g)(t)e^{-st}\,dt =$

$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)\underbrace{e^{-st}}\,dt$

VAKIO τ:n suhteen



Integr. alue: $0 \le t < \infty$, $0 \le \tau \le t$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \Big(\int_{t=\tau}^{\infty} \underbrace{f(\tau)}_{\substack{\text{VAKIO} \\ t\text{:n suht.}}} g(t-\tau) e^{-st} \, dt \Big) d\tau$$

sisäintegraalissa τ on vakio
Muutt. vaihto : $u = t - \tau$
$du = dt$
$u = 0 \Leftrightarrow t = \tau$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) \Big(\int_0^{\infty} g(u) \underbrace{e^{-s(u+\tau)}}_{e^{-su} e^{-s\tau}} \, du \Big) d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(u) e^{-su} du$$

$$= (\mathcal{L} f)(s) (\mathcal{L} g)(s) . \quad \square$$

Esim $\quad H(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2} = \dfrac{1}{s^2+1} \cdot \dfrac{1}{s^2+1}$

$\dfrac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t$, $\quad \dfrac{1}{s^2+1} \to \sin t$

$h(t) = (\sin * \sin)(t)$

Tarvitaan $\sin\alpha \sin\beta$ - kaavaa.

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \right]$$

L/dirac1.m

Tehdään "kevyin" funktiomäärityksin. Valitettavasti inline-funktio ei näkyjään osaa kutsua toista inline-funktiota. Tässä selvitään hyvin kirjoittamalla $u(t-1)$:n sijasta $t>1$, ja

```
>> f = inline('1/2 - exp(-t) + exp(-2*t)',
>> epsi = 1; >> t = linspace(0,4);
>> y = 1/epsi*( f(t-1).*(t>1)
              - f(t-1-epsi).*(t>1+epsi
>> plot(t,y)
>> hold on
>> epsi = 1/2;
>> y = "COPY/PASTE"
```

(tai "command history", tm

(b) $r(t) = \delta(t-1)$ Dirac'in δ

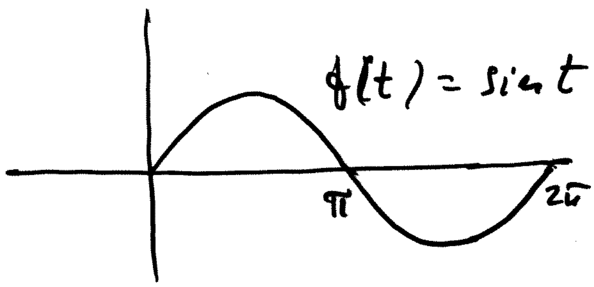
$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

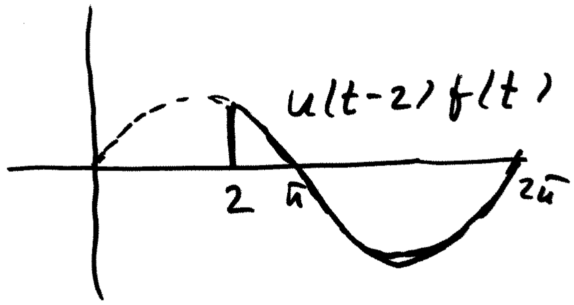
$$y(t) = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ f(t-1), & t > 1 \end{cases}$$

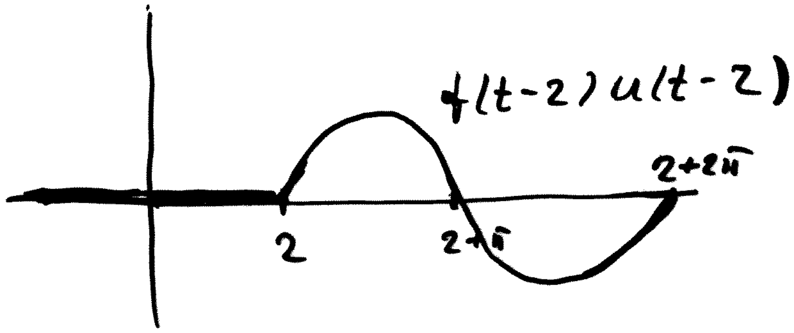
Voitaisiin tehdä vastaavasti kuin edellä, mutta yhtä hyvin:

```
>> t = [0, 1, linspace(1,4)]
>> y = [0, 0, exp(-t(3:end)) - exp(-2*
                               t(3:end))]
>> plot(t,y)
```

Esim KRE s. 266 alh.







Lause t-siirto $(a > 0)$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

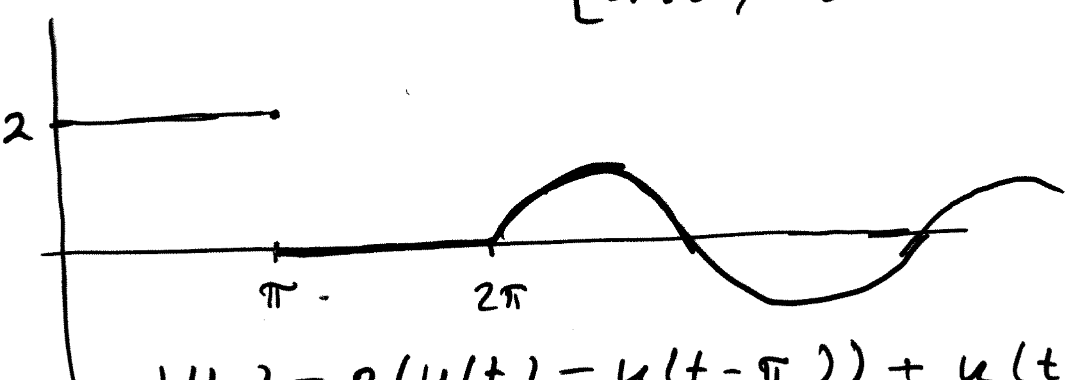
Erit: $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \mathcal{L}\{1(t-a)\,u(t-a)\}$

$$= \frac{1}{s}e^{-as}$$

(Viimeksi laskettiin suoraan.)

Esim 1

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \\ \sin t, & t > 2\pi \end{cases}$$

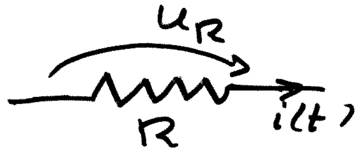


$$f(t) = 2(u(t) - u(t-\pi)) + u(t-2\pi)\underbrace{\sin t}_{\sin(t-2\pi)}$$

21.10.03

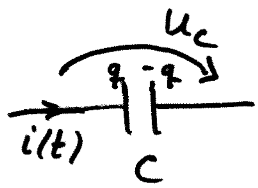
Vaihtovirtapiirit (RLC)

Vastus



$u_R = Ri$ Ohmin laki

Kondensaattori



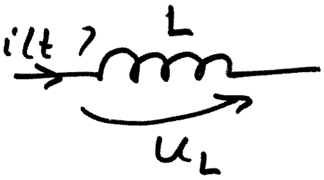
$i = \frac{dq}{dt}$ Virta = varauksen muutosnopeus

$u_c = \frac{q}{C}$ Jännite on verrann. varaukseen

$$\Rightarrow i = C\frac{du_c}{dt}$$

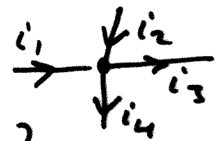
$$\Rightarrow u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

Kela



$u_L = L\frac{di}{dt}$

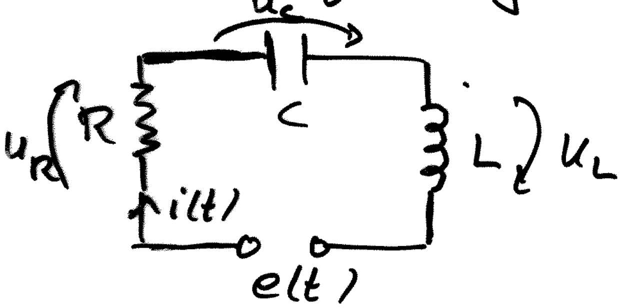
Kirchhoffin virtalaki:



(esim.)

$i_1 + i_2 = i_3 + i_4$

Kirchhoffin jännitelaki:



$u_R + u_c + u_L = e(t)$

(Jos useampia silmukoita, sovelletaan jokaiseen.)

AE: Tavallisesti alkuhetkellä virrat ja varaukset = 0.

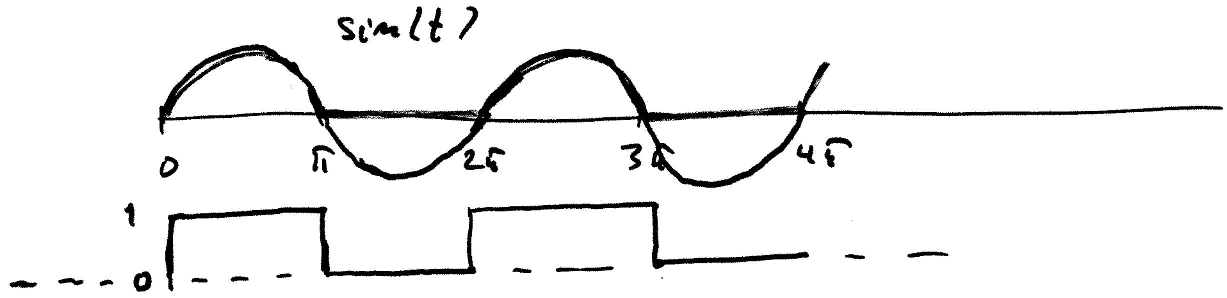
$i(0) = 0$, $u_c(0) = 0$ (koska $q(0) = 0$)

Myös $u_R(0) = 0$, koska $i(0) = 0$.

Siis $u_L(0) = e(0)$, ts. $Li'(0) = e(0)$.

Huom! Yleensä virtojen derivaatat $\neq 0$, kun $t = 0$.

Esim   Puoliaaltotasasuunnattu siniaalto



$$k(t) = u(t) - u(t-\pi) + u(t-2\pi) - u(t-3\pi)$$

```
>> t1 = linspace(0, pi-tol); t2 = linspace(pi+tol,
                                          2*pi-tol
>> t3 = ~~linspace~~ t1 + 2*pi;
>> t4 = t2 + 2*pi;
>> t = [t1, t2, t3, t4];
>> sini = sin(t);
>> kantti = u(t,0) - u(t,pi) + u(t,2*pi)
                    - u(t,3*pi);

>> puoliaaltosini = kantti .* sini
>> plot(t, puoliaaltosini)
```

Esim

$$y'' + y' - 2y = \overbrace{\begin{cases} 3\sin t - \cos t, & 0<t<2\pi \\ 3\sin 2t - \cos 2t, & t>2\pi \end{cases}}^{r(t)}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$r(t) = (3\sin t - \cos t)(u(t) - u(t-2\pi))$$
$$+ (3\sin 2t - \cos 2t)\, u(t-2\pi)$$

($u(t) = 1$, kun $t>0$, haluttaessa void. kirj. aina $u(t) = 1$)

Sievennys $\Longrightarrow$

$$r(t) = 3\sin t - \cos t + \cancel{\cos t - 3\sin t + 3}$$
$$+ (\cos t - 3\sin t + 3\sin 2t)\, u(t-2\pi)$$

$$= 3\sin t - \cos t +$$
$$[\cos(t-2\pi) - 3\sin(t-2\pi) + 3\sin(2(t-2\pi))]\, u(t-2\pi)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = 3\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} +$$
$$e^{-2\pi s}\left[\frac{s}{s^2+1} - 3\frac{1}{s^2+1} + 3\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{3-s}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\left[\frac{s-3}{s^2+1} + \frac{6}{s^2+4}\right] = R(s)$$

$\mathcal{L}$-muunnetaan yhtälö:

$$s^2 Y - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0} + sY - \underbrace{y(0)}_{1} - 2Y = R(s)$$

$$\underbrace{(s^2 + s - 2)}_{(s+2)(s-1)} Y = s + 1 + R(s)$$

$$(\mathcal{L}f)(s) = 2 \cdot \frac{1}{s}\left(1 - e^{-\pi s}\right) + e^{-2\pi s} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

Jos tuntuu mukavammalta, voit tässäkin edetä tyyliin:

$$\mathcal{L}\{u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)\} =$$

$$\mathcal{L}\{[u(t)\sin(t)]_{t \leftarrow t-2\pi}\} =$$

$$= e^{-2\pi s}\,\mathcal{L}\{\sin t\} = e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$