14.10.03

Kertausta epäoleell. int.

Adams 6.5 s.373 → Improper integrals

Tavallinen integraali : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatk.
($\Rightarrow f$ rajoitettu väl. $[a,b]$).
Tällöin $\exists \int_a^b f(x)\,dx$

Epäoleelliset integraalit

Tyyppi I $a = -\infty$ tai $b = \infty$ (tai molemmat)
Tyyppi II f ei rajoitettu ($\Rightarrow$ ei jatk. sulj. väl.)
(esim $f(x) = \frac{1}{x}$ väl. $0 < x < 1$)

Määr, tyyppi I Olk. $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$
jatk. ($\Rightarrow f$ intva jokaisella välillä $[a,b]$, $b \in \mathbb{R}$)

Määr : $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$,

mikäli raja-arvo on olemassa.

SANONNAT : Integraali suppenee
vastakohta : Integraali hajaantuu

Esim 1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = ?$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\Big/_1^b x^{-1} = 1 - \frac{1}{b} \to 1,$$
kun $b \to \infty$

Siis suppenee ja $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$

Esim 2 $\quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big/_1^\infty \ln x = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$

Määr. tyyppi II $\quad f : (a, b] \to \mathbb{R}$ jatk.

(tällöin f ei välttämättä rajoitettu, kun $x \to a+$)

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx .$$

Esim $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0+} \Big/_c^1 \ln x = \infty$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \Big/_0^1 \sqrt{x} = 2$$

Hyvät vertailuintegraalit

p-integraalit $\quad$ ol $a > 0$

(a) $\quad \displaystyle\int_a^\infty x^{-p}\,dx \begin{cases} \text{supp} : \frac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{jos } p > 1 \\ \text{hajı.} \to \infty, & \text{jos } p \le 1 \end{cases}$

(b) $\quad \displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx \begin{cases} \text{supp} : \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ \text{haj.} \to \infty, & p \ge 1 \end{cases}$

Erit. $\quad \displaystyle\int_0^\infty x^{-p}\,dx = \infty \quad \forall p > 0 .$

Vertailutestit (vrt. sarjaoppi)

Ol: $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$

Ol: $f(x) \leq g(x)$ $\forall x > a$

Jos $\int_a^\infty g(x)\,dx$ supp., niin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sup

Jos $\int_a^\infty f(x)\,dx$ haj., niin $\int_a^\infty g(x)\,dx$ haj

(Vrt. minoranttti / majoranttiperiaate sarjoille)

Itseinen suppeneminen

Jos $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ suppenee, niin

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee ja

$$\left| \int_a^\infty f(x)\,dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx$$