LINEAARISET YHTÄLÖSYSTEEMIT

Gausson eliminaatio

(GRE 8.2 s.393→)
(KRE 7.4 s.344→)
KRE8 6.3 s.321→

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m yhtälöä, n tuntematonta

Matriisimuodossa:

Riviajattelu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Vektorimuodossa:

Sarakeajattelu

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tämä sujuvaksi!

(EHY) $A\vec{x} = \vec{b}$ (EpäHomogYht.)

(HY) $A\vec{x} = \vec{0}$ (HomogeeniYhtälö)

Kaikki informaatio yhtälösysteemistä sisältyy __liitännäismatriisiin__ / "augmented matrix"

$$\tilde{A} = Ab = [A \mid \vec{b}\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

__Gaussin eliminaatio, alkeisrivioper.__

("elem. row oper.")

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
>> b = [1; 1; 1]
>> M = [A, b]      % Ã
```

Yleisesti:

```
1. >> M([i,k], :) = M([k,i], :)
      % Riviien i ja k vaihto
2. >> M(i,:) = c * M(i,:)
      % Rivin kertominen luvulla c.
3. >> M(i,:) = M(i,:) + c * M(k,:)
```

Lause Alkeisrivioperaatioissa (c ≠ 0) yhtälösyst. säilyy ekvivalenttina (eli samat ratk.)

Tod 1. Järj. vaihto ei vaikuta.

2. $L_i\vec{x} = b_i \iff cL_i\vec{x} = cb_i$,

kun $c \neq 0$.

3.
$$\left\{\begin{aligned} L_1\vec{x} &= b_1 \\ &\vdots \\ L_k\vec{x} &= b_k \\ &\vdots \\ L_i\vec{x} &= b_i \\ &\vdots \\ L_m\vec{x} &= b_m \end{aligned}\right. \overset{+}{\Longrightarrow} \underset{-}{\Longleftarrow} \left\{\begin{aligned} L_1\vec{x} &= b_1 \\ &\vdots \\ L_k\vec{x} &= b_k \quad (-1) \\ &\vdots \\ L_i\vec{x} + L_k\vec{x} &= b_i + b_k \\ &\vdots \\ L_m\vec{x} &= b_m \end{aligned}\right.$$

Siis todellakin ekvivalentit. □

(Merkitään $L_k\vec{x} = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n$)

Gaussin eliminaatio: 3 tapausta

V3/02
KRE s.33

KP3/0

Esim 3 Ääretön määrä ratkaisuja

$$\begin{cases} 3.0\,x_1 + 2.0\,x_2 + 2.0\,x_3 - 5.0\,x_4 = 8.0 \\ 0.6\,x_1 + 1.5\,x_2 + 1.5\,x_3 - 5.4\,x_4 = 2.7 \\ 1.2\,x_1 - 0.3\,x_2 - 0.3\,x_3 + 2.4\,x_4 = 2.1 \end{cases}$$

PIVOT (TUKI)

$$-\frac{1.2}{3.0} \quad -\frac{0.6}{3.0} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & 5.0 & 8.0 \\ \boxed{0.6} & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ \boxed{1.2} & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{array}\right]$$

"Liitännäismatriisi", "augmented matrix"

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & 5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & \boxed{-1.1} & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{array}\right] \; +$$

$$\downarrow$$

$$r = 2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & 5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(rivi-) porrasmuoto
"row-echelon" fo

↓ "back substitut

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3.0\,x_1 + 2.0\,x_2 + 2.0\,x_3 + 5.0\,x_4 = 8.0 \\ \qquad 1.1\,x_2 + 1.1\,x_3 - 4.4\,x_4 = 1.1 \\ \qquad\qquad (\; 0 = 0 \end{cases}$$

x_3 ja x_4 valittavissa vapaasti

$$x_2 = -x_3 + 4x_4 + 1.0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(8 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4) = \dots = 2 - x_4 .$$

$$\text{Ratk:} \begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 + 4x_4 \\ x_3 \text{ ja } x_4 \text{ vapaat} \end{cases}$$

Äärettömän monta ratk., 2 vapaata param

Esim 4 1-käs. ratk.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{3} & -1 & 1 & 6 \\ \boxed{-1} & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \quad -1 \\ + \quad + \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ + \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 = 2 \Big\} \Rightarrow x_2 = -1 \Big\} \Rightarrow x_1 = 1$$

Esim 5 Ei ratkaisuja

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \text{ref}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Ristiriita: $0 = 12$

$\Longrightarrow$ Ei ratk.

Maple "row-echelon form"

```
> with(LinearAlgebra):
> alias(ref = GaussianEliminatio
> A:=<<3,2,6>|<2,1,2>|<1,1,
> Ab:=<A|<3,0,6>>;
> ref(Ab);
```

Matlab rref, oma modifikaatio ref

Uusi parametrialue

Matriisin saattaminen porrasmuotoon (row echelon form), Gaussin algor. kuvaus

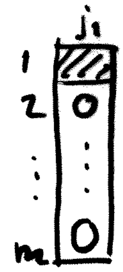
Olk. $\underset{m\times n}{A}$ matriisi.

Matlab-notaatio.
$A(i,:)$ i:s rivi
$A(:,j)$ j:s sarake
$A(2:m,j)$ j:nnen sar. alkiot $2..m$

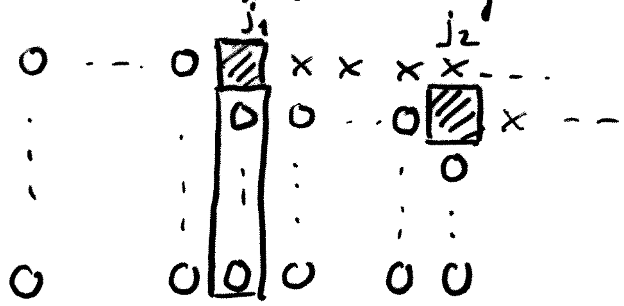
Rivi 1 $i \leftarrow 1$. Valitse pienin sarakeind. j_1 s.e. $A(:,j_1) \neq \vec{0}$. Ellei ole, $A = 0$, END

Vaihda tarvittaessa rivejä, jotta uusi $\boxed{a_{1,j_1}} \neq 0$. Nollaa (Gauss) tukisarakkeen j_1 alaosa: $i = 2..m$

Tukialkio

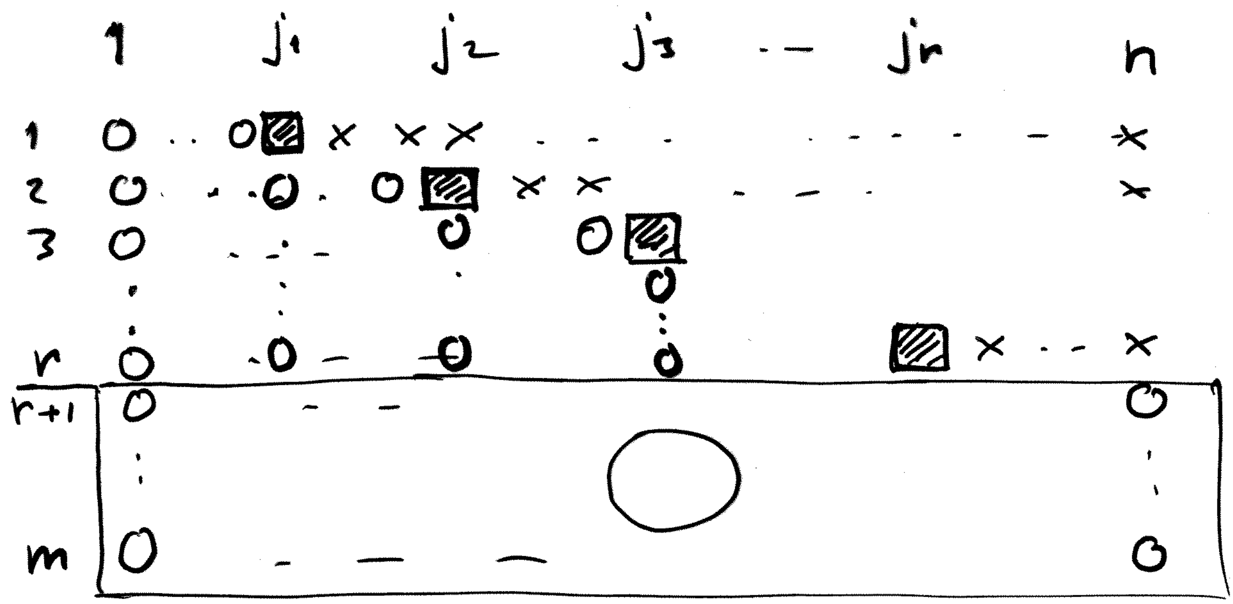


Rivi 2 $i \leftarrow i+1$. Valitse pienin j_2 $(> j_1)$ s.e. $A(2:m, j_2) \neq \vec{0}$. Vaihda tarvittaessa rivejä $\Rightarrow$ uusi $\boxed{a_{2,j_2}} \neq 0$



Jatka, kunnes tulet riville r, jonka jälkeen j_{r+1}:tä ei voi enää valita. Tällöin kaikki rivit $(r+1)$:stä alkaen $= 0$.

Tuloksena on porrasmuoto (ref)



Tukisarakkeet $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

Niitä on yhtä monta kuin 0:sta poikkeavia rivejä ref:ssä.

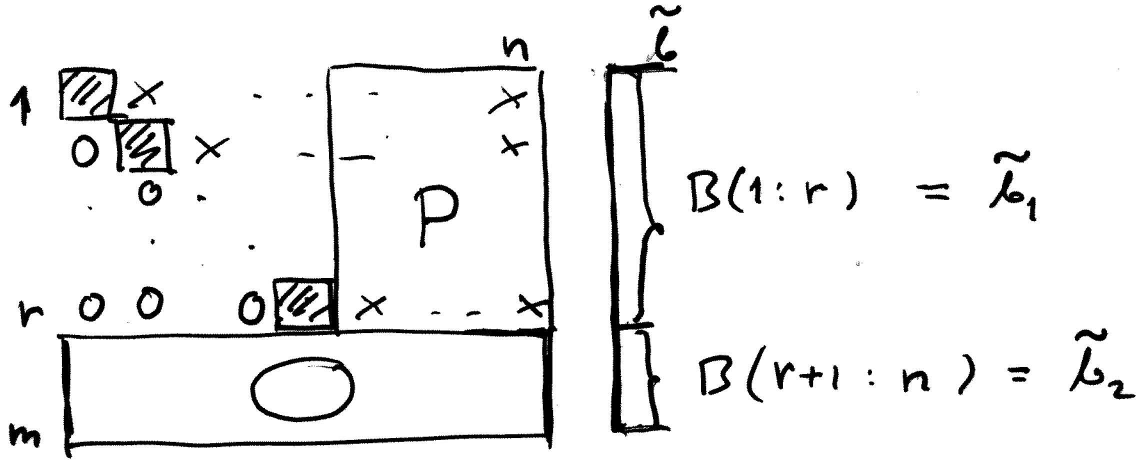
Tukialkio on kunkin 0:sta poikkeavan rivin 1. 0:sta poikkeava alkio.

ref-muodosta tukisarake tunnistuu tukialkion sisältämänä sarakkeena.

$x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$: kantamuuttujat

Muut : vapaat muuttujat.

Jos vaihdetaan sarakkeiden(*) järjestystä niin, että tukisarakkeet tulevat alkuun, saadaan muoto



(*) Järjestyksen vaihto ei vaikuta ratkaisujen olemassaolo- ja lukumääräasioihin. Sensijaan sarakevaihdot vaikuttavat itse ratkaisuihin (toisin kuin rivinvaihdot).

Kuvasta luetaan peruslause:

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad A\ (m \times n)$

<u>LAUSE</u> <u>(LINYHT)</u> LA1.html, KRE s.329

(a) Jos $r < m$ ja $\tilde b_2 \neq \vec 0$, EI RATK.

(b) Jos $\tilde b_2 = \vec 0$ tai puuttuu ($r = m$), niin ratkaisu(ja) on.

(b_1) 1-käs., jos $r = n$

(b_2) ∞ monta ($n - r$ vapaata par), jos $r < n$

<u>Tod</u>: (a) $\Rightarrow$ RR.
(b_1) ja (b_2) takaisinsijoitusjohtopäätös. □