# Determinantit

|A neliömat.|
(KRE 6.6 )

(Kertaustietoisku) LA3.html

- Vanhempi käsite kuin matriisi.
- Merkitys hiipumassa(?), tosin joissakin teor. johdopäätöksissä edelleen tarpeellinen. Meillä erit. ominaisarvoissa.

KRE-tyyli sopii meille:

<u>$n=2$</u>: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>$n=3$</u>: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \\ a_{31} & \end{bmatrix}$

$M_{11}$ alideterminantti

$$\boxed{\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}}$$

"Kehitetään 1. sarakkeen suht"

$M_{ij}$ = $a_{ij}$ - alkion liitt. alidet

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{21} C_{21} + a_{31} C_{31}$$

Näin voidaan $n \times n$-matriisin det määritellä rekursiivisesti.

<u>Lause</u> Kehittäminen minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen antaa saman tuloksen

Tod: KRE: Appendix (aika veivaus) ∎

Huom! Kolmiomatriisin det = diagonaalialkioiden tulo.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & a_{33} & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} M_{11} = \\ &\quad a_{11} a_{22} M_{22} = \\ &\quad a_{11} a_{22} a_{33} \underbrace{M_{33}}_{a_{44}} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}. \end{aligned}$$

yleistyy tietysti.

[Tähän perustuu kaikki yhteydet aiempaan, siis neliömatriisin tapauksessa.]

## Determinanttien yleisiä ominaisuuksia.

**Lause 1** (KRE s. 345)

(a) Kahden rivin tai sarakkeen vaihto $\Rightarrow$ det:n merkki muuttuu

(b) $\text{rivi}_i \leftarrow \text{rivi}_i + c\,\text{rivi}_j \quad (i \neq j)$
$\Rightarrow$ det säilyy samana

(c) $c \cdot \text{rivi}_i \Rightarrow$ det kerrotaan $c$:llä

(Siten $\det(cA) = c^n \det A$)

Tod: Kts. KRE, ~~[illegible]~~. □

Gauss $\sim n^3$
Rekursio $\sim n!$

$30! \simeq 10$
$30^3 \simeq 10$

Seuraus: det A voidaan laskea "miljoona kertaa" tehokkaammin muuntamalla se Gaussin rivi-operaatioilla kolmiomuotoon. (Rivinvaihdot ja skalaarilla kertomiset otettava huomioon.)

## Determinantin kertosääntö KRE s.356

**Thm 4** $\underset{n \times n}{A}, \underset{n \times n}{B}$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Tod: Ei hankala, perustuu ref-muotoon, kts. KRE. $\square$

(Ei vaadita todistusta osattavaksi, tulos kylläkin)

---

## Rangi ja det (s.346)

**Lause 3** (s.347) (yksinkertaistettu versio)

$\underset{n \times n}{A}$ $\quad r(A) = n \iff \det A \neq 0$

Cramerin sääntö:

Kaunis kaava, käytännössä hyödytön. Paitsi joissain pienissä tehtävissä. Jos joskus tarvitset: s.347, K3/P3:ssa et.

Esim Ex 1 s. 352

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A \ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 3 \ + \quad -1 \ +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -1 \ +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} \end{array}$$

skaalataan pivotit ykkösiksi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \quad -3.5 \ + \quad 2 \ +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \ +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Kokeile Matlab:lla

```
>> A= [ .. ; .. ; .. ] ; AI = [A eye(3)]
>> . . .    ( LV teht. 1 )
```

Demotarkoitukseen (huvitteluksi)

```
>> rrefmovie(AI)
```