Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Perämäki

Tentti 24.1. 2005

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. (a) Kirjoita kompleksisen eksponenttifunktion e^z määritelmä.

   (b) Osoita, että e^z on analyyttinen koko kompleksitasossa ja johda sen derivoimiskaava.

2. Määritä differentiaaliyhtälösysteemin $\boldsymbol{y'} = A\boldsymbol{y}$ yleinen ratkaisu, kun
   $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
   Määritä 0 :n tyyppi ja stabiilisuus, piirrä faasitasoon ominaissuorat suuntanuolineen sekä pisteen $(-1, 1)$ kautta kulkeva trajektori (niinikään suuntanuolineen).

3. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' - 5y' + 6y = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{kun } t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

4. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$. Piirrä f :n pariton 4−jaksoinen laajennus välillä $[-4, 4]$, ja muodosta sen Fourier-sarja. Kirjoita näkyviin sarjan 4 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

   Vastaus kertoimien osalta: $-2\,\frac{\cos(n\pi)-\cos(1/2\,n\pi)}{n\pi}$

5. Tarkastellaan 2 :n pituusyksikön mittaista sauvaa, jonka materiaali on sellainen, että lämmönjohtumisyhtälön vakio $c = 1$.

   Katkaistaan sauva keskeltä kahtia ja sijoitetaan toinen puolisko kiehuvaan vesisäiliöön ($100°C$). Toinen puolisko laitetaan jääveteen ($0°C$). Kun sauvan puolikkaat ovat saavuttaneet kauttaaltaan ympäristönsä lämpötilan, ne sijoitetaan lämpöeristeeseen, liitetään takaisin yhteen, ja sijoitetaan vapaaksi jäävät päät jäävesisäiliöön ($0°C$).

   Suorita vaiheittain muuttujanerotteluprosessi sauvan lämpötilafunktion määrittämiseksi.

   Laske sauvan lämpötila hetkellä $t = 0.1$ kummankin sauvan puolikkaan keskipisteessä käyttäen sarjan kahta ensimmäistä termiä.

Kaavoja

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$, $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos\omega t$	$\sin\omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$,

$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Lämpöyhtälö: $u_t = c^2 u_{xx}$.