Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Perämäki

Tentti 30.8. 2004

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

Huomaa, että tehtäväpaperin loppuun on koottu koko joukko ohjeita, kaavoja ym. yleisiä matemaattisia apuneuvoja.

1. (a) Kirjoita kompleksisen eksponenttifunktion määritelmä
   (b) Piirrä z-tasoon suorakulmio
   $\ln \frac{1}{2} < x < \ln 2, \quad -\pi/2 < y < \pi/2 \quad (z = x + iy)$ ja w-tasoon sen kuva kuvauksessa $w = e^z$.
   (c) Laske $Ln(1-i)$ (logaritmin päähaara).

2. Muodosta differentiaaliyhtälösysteemin $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ yleinen ratkaisu, kun
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$
   Laskutyön keventämiseksi: Kun lasket determinanttia $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, älä vaivu epätoivoon, vaan pyri siihen, että saat (onnekkaasti) tekijän $(1 - \lambda)$.
   Jotta ei tulisi liikaa mekaanista laskentaa, riittää, kun lasket pienintä ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin. Muut ominaisvektorit ovat
   $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$ ja $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$.
   (Saat itse päätellä, kumpi vastaa kumpaa, arvaus ei kartuta pistesaldoa.)

3. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä
   $$y'' - 5y' + 6y = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{kun } t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

4. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$. Piirrä f :n parillinen laajennus ja muodosta sen Fourier-sarja (eli f:n (4-jaksoinen) kosinisarja). Kirjoita näkyviin sarjan 4 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

5. Olkoon sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan pituus = 1 ja olkoot yksiköt valittu niin, että lämpöyhtälön vakio $c = 1$. Sauvan päät olkoot lämpötilassa 0 ja olkoon sauvan alkulämpötila
   $$u(x, 0) = f(x) = 3\sin(\pi x) + 5\sin(4\pi x).$$
   Johda muuttujanerottelulla ratkaisu $u(x, t)$.
   Suorita johtaminen vaiheittain. Riittää, kun päädyt ratkaisuun, joka toteuttaa reunaehdot ja alkuehdon, ei tarvitse välttämättä koluta "yhteisen vakion" merkkivalintoja, jos muistat/arvaat sen oikein. Muita ulkoa muistettuja oikaisuja (varsinkaan valmiiseen loppukaavaan sijoittamista) ei sitten sallitakaan.
   Vihje: Mieti, onko tarpeen kehittää jotain Fourier-sarjaksi, jos ei ole, niin älä tuhlaa aikaasi turhaan työhön.

Kaavoja

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$,

$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Lämpöyhtälö: $u_t = c^2 u_{xx}$.