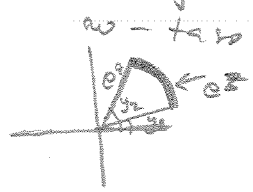
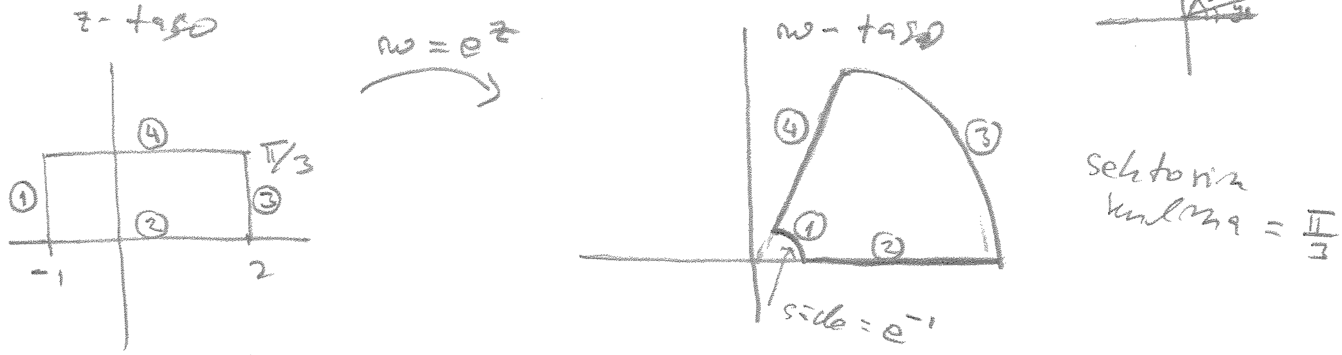
K3/P3 tentti 2.4.2005, Ratkaisut/HA

1) (a) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$.

(b) Kun x = vakio = a ja $y_1 \le y \le y_2$, niin $|e^z| = e^a$ ja $y_1 \le \arg z \le y_2$, geometrisesti: e^z on e^a säteisellä kaarella, jota rajoittavat kulmat y_1 ja y_2





Numeroilla on merkitty vastinreunat. (Kyseessä on kummankin alueen sisäosat.)

(c) $f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{e^x \cos y} + i\underbrace{v(x,y)}_{e^x \sin y}$

Cauchy – Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

No lasketaan:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y$$
$$v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y$$

Siis todellakin $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$. Koska osittaisderivaatat jatkuvia, on f derivoituva (annetussa mielivalt. pist. $z = x + iy$).

Lisäksi $f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y$
$= e^z$.

2)

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1^{\,(x-iy)}}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{Im} w = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

(täydenn. neliöksi) $\iff \underbrace{x^2-2x}_{} + y^2 = 0$

$$\iff (x-1)^2 + y^2 = 1$$

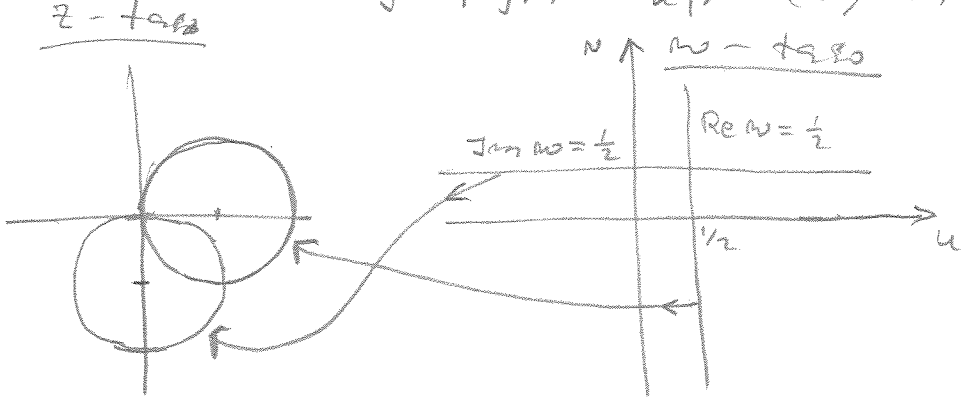
ympyrä: kp: $(1,0)$, säde $= 1$

$$\operatorname{Im} w = \frac{1}{2} \iff -y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\iff x^2 + 2y + y^2 = 0$$

$$\iff x^2 + (y+1)^2 = 1$$

ympyrä: kp: $(0,-1)$, säde: 1



---

3)

$$y'' + 5y' + 6y = \overbrace{3\,(u(t) - u(t-6))}^{r(t)},$$

$$y(0) = y'(0) = 2$$

$\mathcal{L}$ - muunnetaan:

$$\underbrace{(s^2+5s+6)}_{(s+2)(s+3)}\,Y(s) = s\,\overbrace{y(0)}^{0} + \overbrace{y'(0)}^{2} + 5\,\overbrace{y(0)}^{0} + R(s),$$

missä $R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{3}{s}\left(1 - e^{-6s}\right)$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{2}{(s+2)(s+3)}}_{G(s)} + \underbrace{\frac{3}{s(s+2)(s+3)}}_{H(s)}\left(1 - e^{-6s}\right)$$

(H on vain "kirjain H" ei mitenkään viittaa Heavisideen)

Osamurtokommat:

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Kerr. $s+2$:lla ja sij $s=-2 \Rightarrow 2 = A$
Kerr. $s+3$:lla ja sij $s=-3 \Rightarrow -2 = B$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+3}$$

$$H(s) = \frac{3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Kerr. s:llä, sij $s=0 \Rightarrow \frac{3}{6} = A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
Kerr. $(s+2)$:lla, sij $s=-2 \Rightarrow \frac{3}{-2} = B \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$
Kerr. $(s+3)$:lla, sij $s=-3 \Rightarrow \frac{3}{(-3)(-1)} = C \Rightarrow C = 1$

$$H(s) = \frac{1}{2s} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

[Tämä menettely toimii aina kun nimittäjä hajoaa 1. asteen erillisiksi tekijöiksi (nimittäjän 0-kohdat yksinkertaisia).]

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}}_{g(t)} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}_{h(t)} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)e^{-6s}\}}_{h(t-6)u(t-6)}$$

$$= \underbrace{2e^{-2t} - 2e^{-3t}}_{g(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t}}_{h(t)}$$

$$- u(t-6)h(t-6)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} - u(t-6)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2(t-6)} + e^{-3(t-6)}\right)$$

4) $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

<u>Ominaisarvot</u>: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1+\lambda)^2 + 1 = 0 \iff (\lambda+1)^2 = -1$

$\iff \lambda + 1 = \pm i$.

Siis ominaisarvot ovat: $\lambda = -1 + i$ ja
$\bar{\lambda} = -1 - i$

<u>Ominaisvektorit</u>: $\lambda = -1 + i$:

$$\begin{bmatrix} -1+1-i & 1 \\ -1 & -1+1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\iff -ix_1 + x_2 = 0 \implies x_2 = ix_1$
$(-x_1 - ix_2 = 0)$

Val. $x_1 = 1$; $x_2 = i$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Yl. ratk. $\vec{y}(t) = c_1 e^{(-1+i)t}\vec{v}_1 + c_2 e^{(-1-i)t}\vec{v}_2$

$\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ ic_1 - ic_2 = 0 \implies c_1 = c_2 \end{array} \right\} \implies c_1 = c_2 = 1$

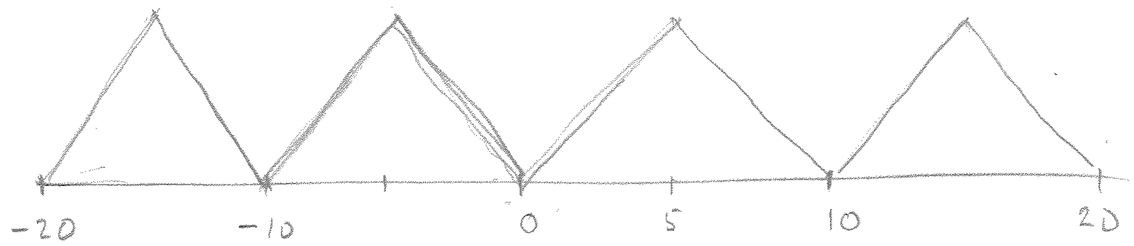
$\vec{y}(t) = e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + e^{(-1-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \cancel{i\sin t} + \cos t - \cancel{i\sin t} \\ i(\cancel{\cos t} + i\sin t - \cancel{\cos t} + i\sin t) \end{bmatrix}$

$= e^{-t} \begin{bmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix} = 2e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$

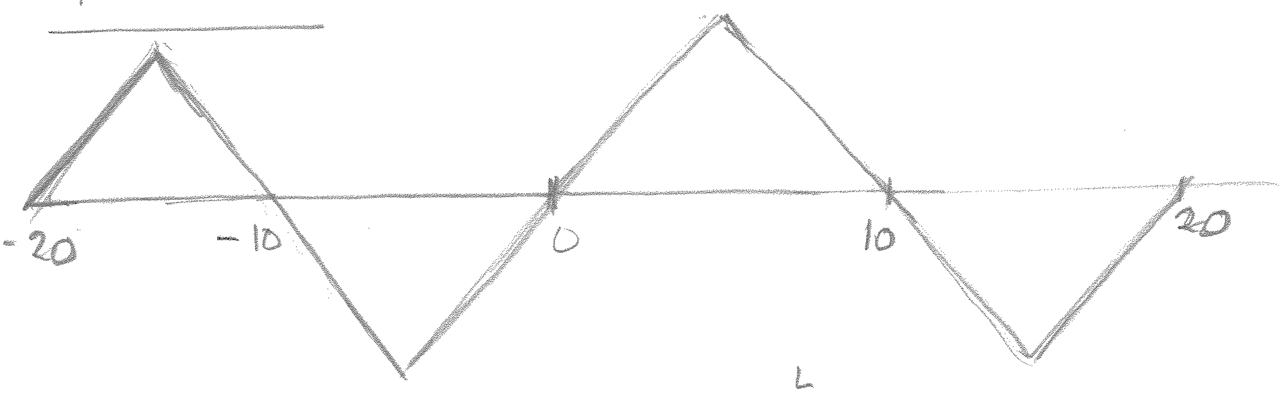
5) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 5 \\ 10-x, & 5 \le x \le 10 \end{cases}$

(a) Parillinen, 20-jaksoinen laajennus:



(Funktion f symmetriasta suoran $x = 5$ suhteen seuraa, että parill. laajennus on itse asiassa 10-jaksoinen ($\Rightarrow$ 20-jaks.))

Pariton ∘ ∘ ∘



(b) Sinisarja: $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx + \frac{1}{5}\int_5^{10}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

Lasketaan osittaisintegroinnilla

$$\int_a^b x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx = -\frac{10}{n\pi}\int_a^b x\,d\cos\frac{n\pi x}{10}$$

$$= -\frac{10}{n\pi}\Big/_a^b x\cos\frac{n\pi x}{10} + \frac{10}{n\pi}\int_a^b \cos\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{10}{n\pi}\left[-\Big/_a^b x\cos\frac{n\pi x}{10} + \frac{10}{n\pi}\Big/_a^b \sin\frac{n\pi x}{10}\right]$$

Sitten vain tarkkana:

$$b_n = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{n\pi}\left[-\Big/_{0}^{5} x\cos\frac{n\pi x}{10} + \frac{10}{n\pi}\Big/_{0}^{5}\sin\frac{n\pi x}{10}\right]$$

$$+\frac{1}{5}\cdot 10\cdot\frac{10}{n\pi}\cdot(-1)\Big/_{5}^{10}\cos\frac{n\pi x}{10}$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{n\pi}\left[-\Big/_{5}^{10} x\cos\frac{n\pi x}{10} + \frac{10}{n\pi}\Big/_{5}^{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cancel{-5\cos\frac{n\pi}{2}} + \frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{20}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cancel{\cos\frac{n\pi}{2}}\right)$$

$$-\frac{2}{n\pi}\left[\cancel{5\cos\frac{n\pi}{2}} - 10\cos n\pi + \frac{10}{n\pi}\left(0 - \sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{20}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{20}{n\pi}\cos n\pi + \frac{20}{n\pi}\cos n\pi$$

$$+\frac{20}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{40}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}}}$$

n	1	2	3	4	5
$\sin\frac{n\pi}{2}$	1	0	-1	0	1

$$\phi(x) = \frac{40}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{10} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{10} + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{10} + \dots\right)$$

Kommentti 1) Kieltämättä pitkänpuoleinen tehtävä.
2) Ehkä tavallisuudesta poikkeavasti 2 tehtävää kompleksianalyysistä ja lineaarialgebraa, numeriikkaa, osdiffyht kenties jäätiin kaipaamaan.
selitys: kurssi on laaja, eri tenteissä voivat painotukset vaihdella.