Kesätentti Mat-1.433/443 K3/P3
6.6.2005 Ratkaisut, HA

1)
$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \underbrace{\ln r}_{u(r,\varphi)} + i \underbrace{\varphi}_{v(r,\varphi)}$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{d}{dr} \ln r = \frac{1}{r} \\ v_\varphi = \frac{d}{d\varphi} \varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$$

$$v_r = 0, \quad u_\varphi = 0 \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$$

Siis Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa ja kun os. derivaatat ovat jatkuvia, niin $f(z) = \ln z$ on derivoituva. (Oletamme: $z \neq 0$, joten $r \neq 0$.)

$$f'(z) = \frac{1}{r}(v_\varphi - i u_\varphi)(\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{r}(1)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}^{1}}{\underbrace{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{z}} = \frac{1}{z}$$

Lavenn. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:llä

2) $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

L-muunnetaan:

$$\underbrace{(s^2 + 3s + 2)}_{(s+1)(s+2)} Y(s) = e^{-s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = e^{-s} \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Kerr. $(s+1)$:llä, $s=-1$ $\Rightarrow 1 = A$

Kerr. $(s+2)$:lla, $s=-2$ $\Rightarrow -1 = B$

$$\Rightarrow Y(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = u(t-1)\left(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}, & \text{kun } t > 1 \end{cases}$$

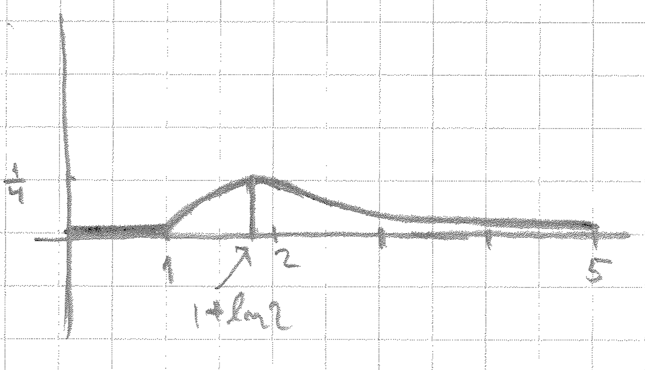
$$y'(t) = -e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}, \quad t > 1.$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\left(e^{-(t-1)}\right)^2 = e^{-(t-1)}$$

$$\Leftrightarrow e^{-(t-1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t-1 = \ln 2.$$

Siis $t_{max} = 1 + \ln 2$

$y_{max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$



3) $A = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 5$, ominaisvektorit : $(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -12 & -16 & 4 \\ 6 & 8 & -2 \\ 12 & 16 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$

Voitaisiin tehdä ref, mutta nähdään suoraan, että $\begin{cases} 2 \cdot \text{rivi}_2 = \text{rivi}_3 \\ (-1) \cdot \text{rivi}_1 = \text{rivi}_3 \end{cases}$

Siis yhtälösysteemiin jää vain yksi yht.:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$

Val. $x_1 = 1,\ x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 3$
$x_1 = 0,\ x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 4$

Siis on arvoon $\lambda = 5$ liittyvän ominaisavaruuden (eräs) kanta on

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Matriisi $\underset{3\times 3}{A}$ on diagonalisoituva, jos sillä on 3 LRT om. vektoria.

Riittää siis osoittaa, että vektorit

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ovat LRT.

Voitaisiin tehdä ref $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$: lle tai vaikka laskea det

-3 *

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$ Tästä muodosta nähdään, että

$\det = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$, joten

om.vektorit ovat LRT ja siis A on diagna.

Tai: Lasketaan $A\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Siis $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ on ominaisarvoon $\lambda = -3$ liittyvä ominaisvektori, joten se on lin. riippumaton ominaisarvoon $\lambda = 5$ liittyvistä ominaisvektoreista.

(Sama asia "mekaanisemmin":

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = 5\text{:n} & \text{alg. kl} = 2 \\ & \text{geom. kl} = 2 \\ \lambda = -3\text{:n} & \text{alg. ja geom. kl} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{diagna.})$$

Huomaa, että jos ominaisvektori $\vec{v}$ on annettu, niin ominaisarvo saadaan aina muodostamalla $A\vec{v}$ ja jakamalla se "pisteittäin" $\vec{v}$:llä.

Emme todella tarvinneet $\det(A - \lambda I)$:n laskentaa, joka olisi aika työlästä.

4) $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Om. arvot: $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda - 3)(\lambda + 4) + 10 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \left\langle {1 \atop -2} \right.$

<u>Om. vektorit</u> : <u>$\lambda = 1$</u> : $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>$\lambda = -2$</u> : $5x_1 - 2x_2 = 0$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ratk. : $\vec{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 3 \\ c_1 + 5c_2 = 6 \end{cases} - \Rightarrow 3c_2 = 3$

$\Rightarrow c_2 = 1$

$\Rightarrow c_1 = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow \vec{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + 2e^{-2t} \\ e^t + 5e^{-2t} \end{bmatrix}$

(b) <u>Euler</u> : $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + hA\vec{y}_0$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix}$

$h = 0.1$: $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 3 - 0.3 \\ 6 - 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 5.1 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}_2 = \vec{y}_1 + hA\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 5.1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -2.1 \\ -6.9 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2.49 \\ 4.41 \end{bmatrix}}}$$

(c) <u>Heun</u>: $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_1^* = \vec{y}_0 + hA\vec{y}_0$

$h = 0.2$; $\vec{y}_1^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + h \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix}}_{\text{laskettiin jo edellä}} \underset{h=0.2}{=} \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.2 \end{bmatrix}$

$$\vec{k}_1 = \frac{1}{2}(A\vec{y}_0 + A\vec{y}_1^*)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.2 \\ -4.8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2.1 \\ -6.9 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + h\vec{k}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} -2.1 \\ -6.9 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2.58 \\ 4.62 \end{bmatrix}}}$$

(d) Tarkka: $y(t) = \begin{bmatrix} e^t + 2e^{-2t} \\ e^t + 5e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$y(0.2) = \underline{\begin{bmatrix} 2.562 \\ 4.573 \end{bmatrix}}$$

Nähdään heti, että Heun-askel tuotti tarkemman tuloksen, tämä riittää, mutta lasketaan nyt virheet

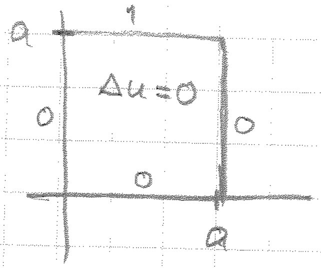
$$y_{\text{tarkka}} - y_{\text{Euler}} = \begin{bmatrix} 2.562 \\ 4.573 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.49 \\ 4.41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

$$y_{\text{tarkka}} - y_{\text{Heun}} = \begin{bmatrix} 2.562 \\ 4.573 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.58 \\ 4.62 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

(Euler jää alle, Heun menee yli.)

5) Os. diff. yhtälö ja 0 – RE:t on tällä kertaa hoidettu "viran puolesta".

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a}$$



yläreunaehto $\Longrightarrow$

$$1 = u(x,a) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(B_n \sinh n\pi)}_{b_n} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

Tämä toteutuu valitsemalla b_n vakiofunktion 1 sinisarjan kertoimeksi, jaksona 2a

Ts. $$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a 1 \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi} \Big/_0^a \cos\frac{n\pi x}{a} = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{b_n}{\sinh n\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi \cdot \sinh n\pi}$$

$$\Rightarrow (B_n) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1 \cdot \sinh \pi}, 0, \frac{1}{3 \sinh 3\pi}, 0, \ldots\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Siis } u(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sinh\frac{n\pi y}{a}}{n \cdot \sinh n\pi} \\ &\overset{a=12}{=} \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{12} \cdot \sinh\frac{\pi y}{12}}{\sinh \pi} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{12} \sinh\frac{3\pi y}{12}}{3 \cdot \sinh 3\pi} \right. \\ &\left. + \frac{\sin\frac{5\pi x}{12} \cdot \sinh\frac{5\pi y}{12}}{5 \sinh 5\pi} + \frac{\sin\frac{7\pi x}{12} \sinh\frac{7\pi y}{12}}{7 \sinh 7\pi} + \ldots \right) \end{aligned}}$$