Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola

Kesätentti 6.6. 2005

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

Huomaa, että tehtäväpaperin lopussa on kaavakokoelma.

1. Olkoon $f(z) = f(r(\cos\phi + i\sin\phi)) = u(r,\phi) + i\,v(r,\phi)$. Tässä siis r ja ϕ ovat tason pisteen z napakoordinaatit.
   Voidaan osoittaa, että *Cauchy–Riemann*in yhtälöt saavat napakoordinaateissa lausuttuna muodon:
   $$u_r = \frac{1}{r}v_\phi, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\phi,$$
   ja niiden vallitessa $f'(z) = \frac{1}{r}(v_\phi - i\,u_\phi)(\cos\phi - i\sin\phi)$.

   Osoita näiden tietojen avulla, että $\ln z$ on derivoituva kaikissa pisteissä $z \neq 0$ ja $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$. Tässä $\ln z$ tarkoittaa sellaista logaritmin haaraa, joka on jatkuva pisteessä z.

2. Massa-jousisysteemiä mallintava differentiaaliyhtälö alkuehtoineen olkoon
   $$y'' + 3\,y' + 2\,y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$
   Herätteenä $r(t)$ on hetkellä $t = 1$ tapahtuva yksikköimpulssin suuruinen vasaranisku, jota mallinnetaan *Dirac'n deltalla*
   $\delta(t-1)$. Määritä yhtälön ratkaisu eli vaste $y(t)$. Määritä lisäksi ajanhetki, jolla vaste saa maksimiarvonsa ja hahmottele kuvaaja välillä $[0,5]$.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$
   A :n eräs ominaisarvo on 5 ja eräs ominaisvektori on $[-2,1,2]^T$.
   Selvitä, onko matriisi diagonalisoituva.

   Vihje: Laske ensin annettua ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden kanta. Mieti, tarvitsetko mihinkään karakteristista polynomia.

4. Tarkastellaan alkuarvotehtävää $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = [3,6]^T$, missä
   $$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$
   (a) Ratkaise alkuarvotehtävä tarkasti.
   (b) Muodosta numeerinen likiarvo pisteessä $t = 0.2$ laskemalla kaksi askelta Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$.
   (c) Muodosta numeerinen likiarvo pisteessä $t = 0.2$ laskemalla yksi askel Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$.
   (d) Kumpi tapa tuottaa tarkemman likiarvon?

5. Ohuen neliönmuotoisen (sivu $a = 12$) levyn tahkopinnat on lämpöeristetty ja yläreuna ($0 \le x \le a, \quad y = a$) pidetään lämpötilassa $100°$ ja muut reunat lämpötilassa $0°$.

   Määritä tasapainolämpötilafunktio $u(x,y)$, ts. ratkaise *Laplacen yhtälö* $\Delta u = 0$ yo. reunaehdoin. Kirjoita auki sarjan 4 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

   Opastus: Muuttujien erottelu ja 0-reunaehdot johtavat muotoa
   $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi\,x}{a}\sinh\frac{n\pi\,y}{a}$$
   olevaan ratkaisuun. Sijoita tähän $y = a$, niin saat (yläreunaehdon perusteella) ehdon kertoimien B_n määräämiseksi.

Käännä

Kaavoja, menetelmiä

2. asteen yhtälö (kesän kunniaksi)

$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$, $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$,

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^L f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$.

Differentiaaliyhtälöiden numeriikkaa

Annettu differentiaaliyhtälösysteemi: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$

Eulerin menetelmä

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n)$$

Heunin menetelmä (eli parannettu Euler)

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^\star_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) \\ \boldsymbol{k}_n = \frac{1}{2}(\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}^\star_{n+1})), \quad \boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\,\boldsymbol{k}_n \end{cases}$$

Arvosteluaikataulu

Tulosten julkistaminen menee pahimmassa tapauksessa elokuun alkupuolelle kesälomien takia. Viimeistään n. 10.8.05.
Malliratkaisut pyritään saamaan www-sivulle mahdollisimman pian tentin jälkeen.

Hyvää kesää kaikille!