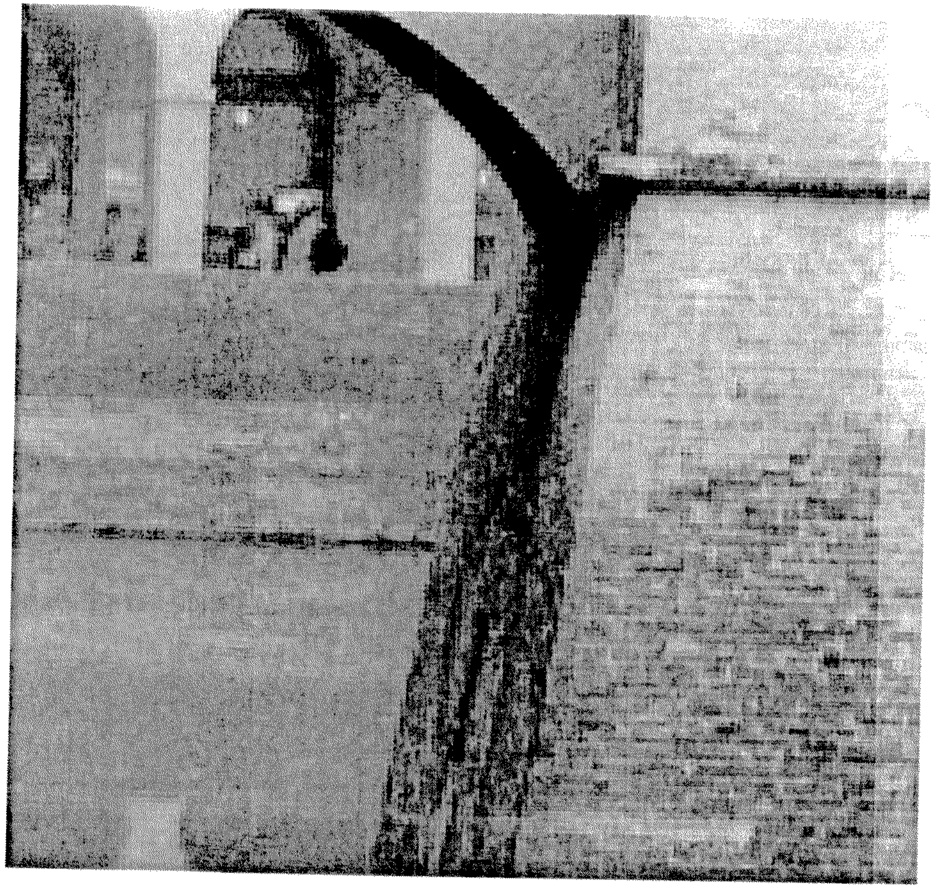
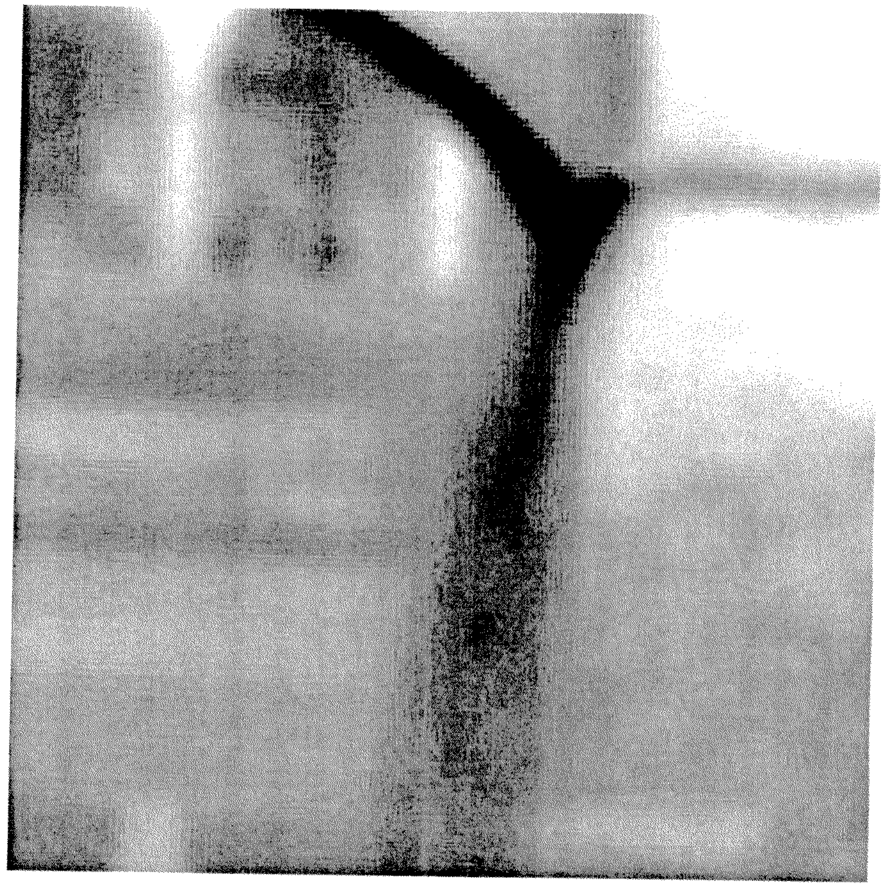
Inversio-ongelmat
(differentiaaliyhtälöille)

Syksy 2006

Matti Lassas

First example of inverse problems: Image deblurring





Direct and inverse problem of image deblurring

Direct problem:

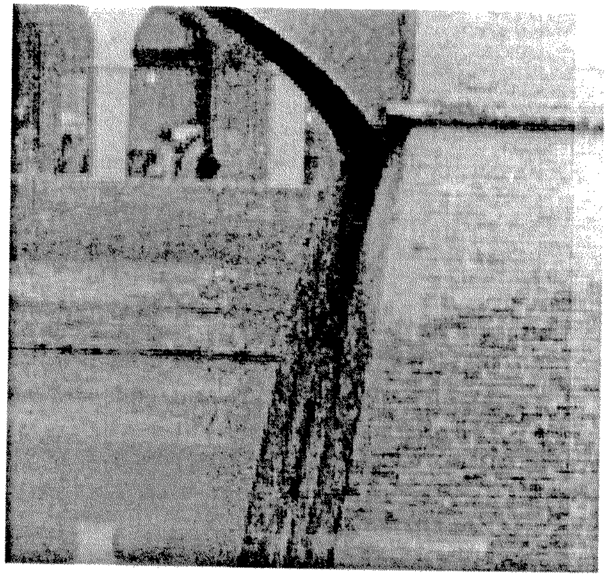
Given a sharp photograph, what would the blurred version of the image look like?

Inverse problem:

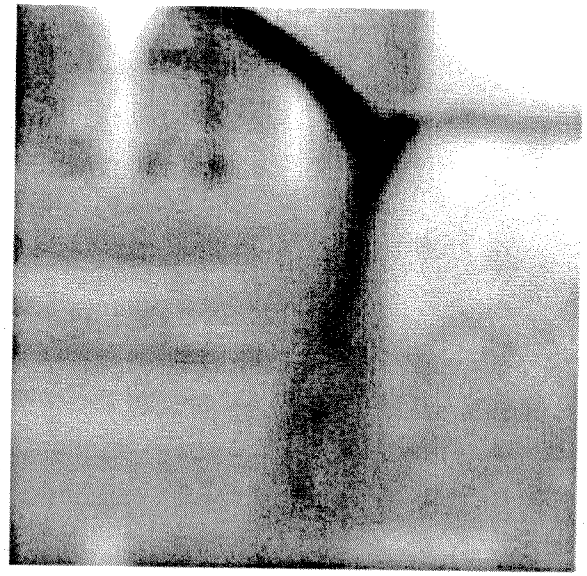
Given a blurred photograph, reconstruct the sharp image

The inverse problem is more difficult

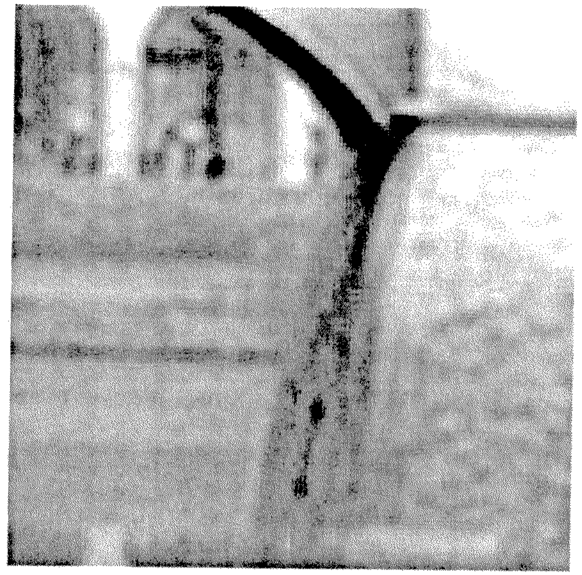
Original image



Blurred image

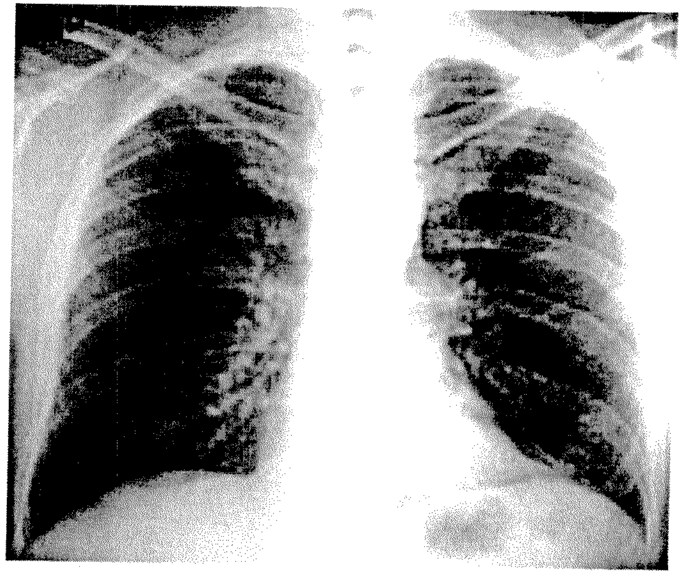


Reconstruction



This example is from
Calvetti & Somersalo 2005,
Inverse Problems 21, pp. 1697-1714

Second example of inverse problems: Computerized tomography



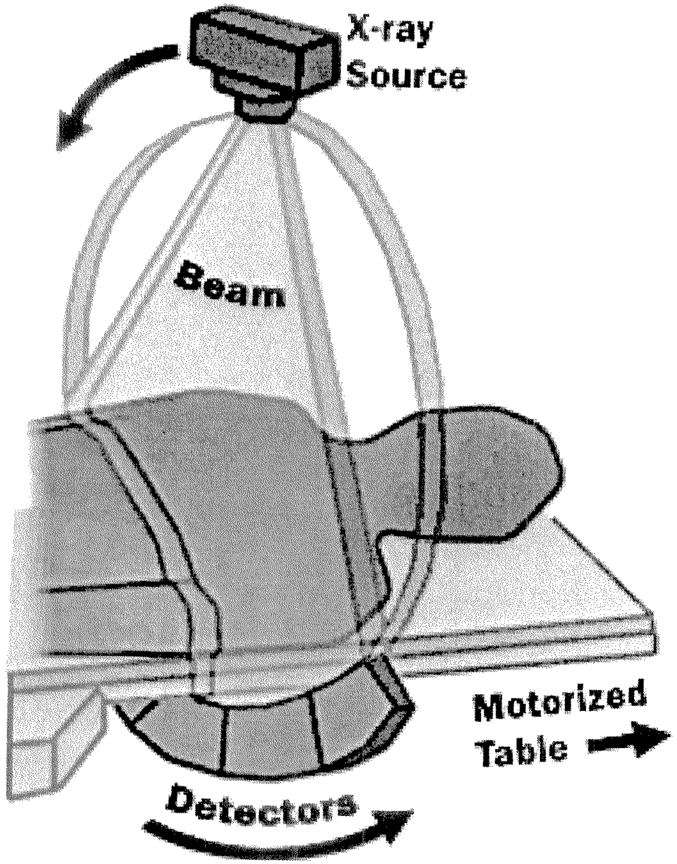
Direct problem:

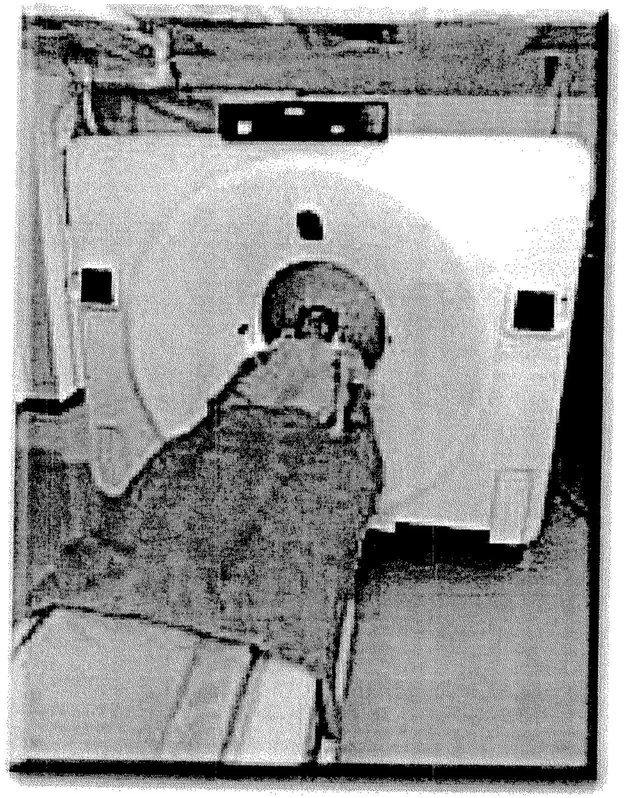
If the inner structure of a person is known, what would X-ray images of her look like?

Inverse problem:

Given X-ray images from all around the body, what is the inner 3-D structure?

Traditionally, CT data is collected slice by slice





Images from http://www.fda.gov/cdrh/ct/what.html

2. Esitietoja.

Merkintöjä. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jatkuva, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avo

- $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{cl}\left(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}\right)$

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on multi-indeksi

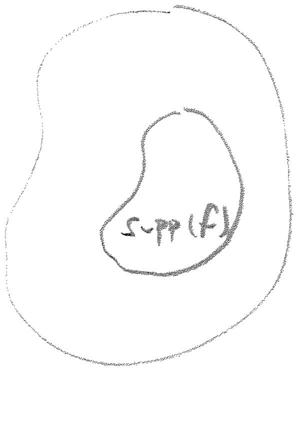
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

- $D_{x_k} = -i \frac{\partial}{\partial x^k}$, $\quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$
  $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$

- $f \in C^\infty(\Omega)$ jos $D^\alpha f$ on jatkuva kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}^n$

- $C_0^\infty(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \subset \Omega$ on kompakti$\}$.



2.1 Nopeasti vähenevät funktiot

<u>Määr 2.1</u> Sanomme, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ nopeasti vähenevä, tai f on Schwartzin luokan funktio, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\alpha f(x)| < \infty$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

<u>Määr 2.2</u> Sanomme, että

$$\lim_{j \to \infty} f_j = f \qquad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\text{:ssä},$$

jos kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_{\alpha,\beta} = 0$$

Määr 2.3 Funktion $f \in S(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_{x \to \xi} f(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Lause 2.4 Pätee:

1) $\mathcal{F}_{x \to \xi} (D_x^\alpha f) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

2) $\mathcal{F}_{x, \xi} (x^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

3) $\mathcal{F}_{x \to \xi} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva

4) $(\mathcal{F}_{\xi \to x} \mathcal{F}_{x \to \xi} f)(x) = (2\pi)^n Jf(x) := f(-x) \cdot (2\pi$

Tod: 1, 2, 4 : L 4

3: HT □

Lause 2.5 (Parsevalin kaava). Kun $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \qquad (1)$$

Tod. Fubinin lauseen nojalla

$$(\hat{f}, h)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \overline{h(\xi)}\, dx\, d\xi$$

$$= (f, \hat{h}(-\xi))_{L^2} = (f, J\hat{h})_{L^2}$$

Sijoittamalla $h = \hat{g}$, jolloin $J\hat{h} = \frac{1}{(2\pi)^n} g$, saamme kaavan (1). $\square$

2.2. Temperoidut distribuutiot.

Määr. 2.6 Lineaarinen kuvaus $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$

on jatkuva jos

$$\left[\lim_{j\to\infty} f_j = f \quad \mathcal{S}(\mathbb{R})\text{:ssä}\right] \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} u(f_j) = u(f).$$

Tällöin sanomme, että u on temperoitu distribuutio eli $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Määr. 2.7 Sanomme, että

$$\lim_{j\to\infty} u_j = u \qquad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\text{:ssä}$$

jos jokaisella $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$\lim_{j\to\infty} u_j(f) = u(f)$$

Merkitään $u(f) = \langle u, f\rangle = \langle f, u\rangle$.

$$= \text{"}\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x)\,dx\text{"}$$

Lause 2.8

1) $S(\mathbb{R}^n)$ on täydellinen (complete) ts. jos (f_j) on Cauchy-jono, eli

$$\lim_{j,k} \| f_j - f_k \|_{\alpha,\beta} = 0 \quad \text{kaikilla } \alpha, \beta,$$

niin on $f \in S(\mathbb{R}^n)$ jolle

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \quad S(\mathbb{R}^n)\text{:ssä.}$$

2) Jos $u_j \in S'(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, ja kaikilla $f \in S(\mathbb{R}^n)$ on olemassa

$$\lim_{j\to\infty} \langle u_j, f\rangle$$

niin kuvaus $u(f) = \lim_{j\to\infty} \langle u_j, f\rangle$ määrittelee temp. distribution $u \in S'(\mathbb{R}^n)$

Tod. Sivuutetaan kts. Hörmander I.

Esimerkkejä ja määritelmiä

1) Jokainen polynomisesti rajoitettu mitallinen funktio $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ määrää temperoidun distribuution

$$\langle u, f \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x)\, dx, \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Sama pätee funktiolle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2) Kompaktisti kannatettu äärellinen Borel-mitta μ määrää temp. distribuution

$$\langle T_\mu, f \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x)$$

3) Jos $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, jolle $|\partial^\alpha h(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha}$ kaikille α. Silloin tulo hu määritellään

$$\langle hu, f \rangle := \langle u, \underset{\underset{S(\mathbb{R}^n)\,!}{\cap}}{hf} \rangle, \quad f \in S(\mathbb{R})$$

ja pätee $hu \in S'(\mathbb{R}^n)$.

4) Jos $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, on sen derivaatta temperoitu distribuutio $D^\alpha u \in S'(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \partial^\alpha u, f \rangle := \langle u, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha f \rangle.$$

7)

5) Jos $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, sen Fourier-muunnos $\hat{u} \in S'(\mathbb{R}^d)$ on

$$\langle \hat{u}, f \rangle = \langle u, \underset{\uparrow \atop \in S(\mathbb{R}^d)}{\hat{f}} \rangle, \quad f \in S(\mathbb{R}^d)$$

HT: $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ on jatkuva ja Lauseen 2.4 laskusäännöt ovat voimassa.

6) δ-distribuutio, olk. $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \delta_{x_0}, f \rangle = f(x_0).$$

HT: $\delta_{x_0} \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\delta}_{x_0} = e^{-ix_0 \xi}$

7) Jos $h \in S(\mathbb{R}^d)$, $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, niin $h * u \in S'(\mathbb{R}^d)$ määritellään

$$\langle h * u, f \rangle = \langle \hat{h} \hat{u}, J \hat{f} \rangle,$$

HT $\langle h * u, f \rangle = \langle u, (Jh) * f \rangle$.

$\mathcal{F}(h * u) = \hat{h} * \hat{u}$

8)

8) Cauchyn pääarvointegraali

p.v. $\frac{1}{x} \in S'(\mathbb{R})$ on

$$\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, f \rangle = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} f(x)\, dx$$

$$:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} f(x)\, dx$$

Ht: $\mathcal{F}(\text{p.v.} \frac{1}{x}) = c \cdot \operatorname{sgn} \xi$,

$$\operatorname{sgn} \xi = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ -1, & \xi < 0. \end{cases}$$

9) Jos $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^m)$ on lineaarinen määritellään $A^t: S'(\mathbb{R}^m) \to S'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle A^t u, f \rangle = \langle u, Af \rangle$$

Esim: ∂^α tai $\mathcal{F}_{x' \to \xi'}$, kun $x = (x', x'')$

9)

10) Sanomme, että $u|_{\Omega} = 0$ missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on

<u>avoin</u> jos $\langle u, f \rangle = 0$ kaikilla f

joilla $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$.

Distribuution u kantaja $\mathrm{supp}(u)$

pienin suljettu $D \subset \mathbb{R}^n$ jolle $u|_{\mathbb{R}^n \setminus D} = 0$

HT: Näytä että $\mathrm{supp}(\delta_{x_0}) = 0$.

11) Tensoritulot. Olkoon $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, $w \in S'(\mathbb{R}^m)$

Määrittelemme $u \otimes w \in S'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = S'(\mathbb{R}^{n+m})$

asettamalla

(3) $$\langle u \otimes w, f(x')g(x'') \rangle = \langle u, f \rangle \langle w, g \rangle$$

kun $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ja $f \in S(\mathbb{R}^n)$,
$g \in S(\mathbb{R}^m)$.

Koska funktiot $f(x')\,g(x'')$ virittävät tiheän $S(\mathbb{R}^{n+m})$:n aliavaruuden, (3) määrää yksikäsitteisen $S'(\mathbb{R}^{n+m})$:n alkion (HT).

Huom: Jos $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $g \in S(\mathbb{R}^m)$ niin

$$f \otimes g = f(x')\,g(x'') \in S(\mathbb{R}^{n+m})$$

10) HT: Osoita: $\delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} = \delta_{(x_0, y_0)} \in S'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

12) Integrointi

Olkoon $a \in S'(\mathbb{R}^{n+m})$, $g \in S(\mathbb{R}^n)$.
Tällöin määritellään

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} a(x,y)\, g(y)\, dy \in S'(\mathbb{R}^m)$$

asettamalla

$$\langle I, h \rangle = \langle a, h \otimes g \rangle.$$

Jos $a \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$, tämä määritelmä yhtyy määritelmään

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} a(x,y)\, h(x)\, g(y)\, dx\, dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x,y)\, g(y)\, dy \right) dx.$$

11)

13) Greenin funktio. Olkoon

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

missä $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ovat polynomisesti rajoitettuja, $(|D^\beta a_\alpha| \le C_\beta (1+|x|)^{m_{\beta,\alpha}}$.

$G \in S'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ on $P(x,D)$:n greenin funktio, jos

$$P(x,D)\, G(x,y) = \delta(x-y).$$

Tässä $\delta(x-y) \in S'(\mathbb{R}^{n+n})$ on distribuutio

$$\langle \delta(x-y), h \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(x,x)\, dx, \qquad h \in S(\mathbb{R}^{n+n}).$$

<u>Lause</u>: Olkoon $P(x,D)$:llä greenin funktio G. Silloin yhtälöllä

$$P(x,D)\, u = w \in S'(\mathbb{R}^n)$$

On ratkaisu

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,y)\, w(y)\, dy \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Tod. HT.

12)

<u>Huomautus</u> Distribuutiot voidaan määritellä ilman kasvuehtoa äärettömyydessä. Tällöin aloitamme avaruudesta

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin.}$$

Tämän topologia määritellään siten, että saamme:

<u>Määr</u> Lineaarinen kuvaus $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ on jatkuva jos kaikille $\varphi, \varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, joille

1) On kompakti joukko $K \subset \Omega$ s.e.

$$\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K \quad \text{kaikilla } j$$

2) $$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha(\varphi_j(x) - \varphi(x))| = 0$$

kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}^n$

Pätee

$$\lim_{j\to\infty} u(\varphi_j) = u(\varphi).$$

Tällöin sanotaan, että u on distribuutio Ω:ssa, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

12 b)

Kuten aiemmin.

<u>Määr</u> Sanomme, että

$$\lim_{j\to\infty} u_j = u \quad \mathcal{D}'(\Omega)\text{:ssä}$$

jos

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi) \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Merkitään $\langle u, \varphi \rangle = u(\varphi)$.

Derivointi ja funktiolla kertominen (nyt mielivaltaisella C^∞-funktiolla) määritellään kuten $S'(\mathbb{R}^n)$:ssä ja

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n),$$

$$S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Jos $u \in L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, niin

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

2.3 Sobolev-avaruudet

Määr 2.10 Sobolev-avaruus $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ on niiden $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ($\hat{u} \in L^1_{loc}$ ja) avaruus, jolle

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi$$

on äärellinen.

Huom Jos $s \in \mathbb{N}$, on $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Tod: HT.

Määr 2.11 Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin,

$$H^s_0(\Omega) = \mathrm{cl}_{H^s(\mathbb{R}^n)} \left(C^\infty_0(\Omega) \right) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$$

ja

$$H^s(\Omega) = \{ u|_\Omega \; : \; u \in H^s(\mathbb{R}^n) \}$$

$$\|w\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{w = u|_\Omega} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

... kuvauksen ... määritelmä on

Lause 2.12 Kun $s \in \mathbb{N}^n$ ja $\partial\Omega$ on C^∞,

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \asymp \left(\sum_{|\alpha| \le n} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Tod. Sivuutetaan.

Lause $H^s(\mathbb{R}^n)$, $H^s_0(\Omega)$ ja $H^s(\Omega)$ ovat Hilbert-avaruuksia.

Tod 1) $H^s(\mathbb{R}^n)$ on isometrinen avaruuden $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^{s/2} d\xi)$ kanssa.

2) $H^s_0(\Omega) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ on suljettu aliavaruus

3) $H^s(\Omega)$: sivuutetaan. $\square$

Esim: $\Delta : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva.

Lause $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ on $H^s(\mathbb{R}^n)$:n tiheä osajoukko.

14.) **Tod** Sivuutetaan.

3 Yksiulotteinen aaltoyhtälö

Tutkitaan yhtälöä

Pistelähde.

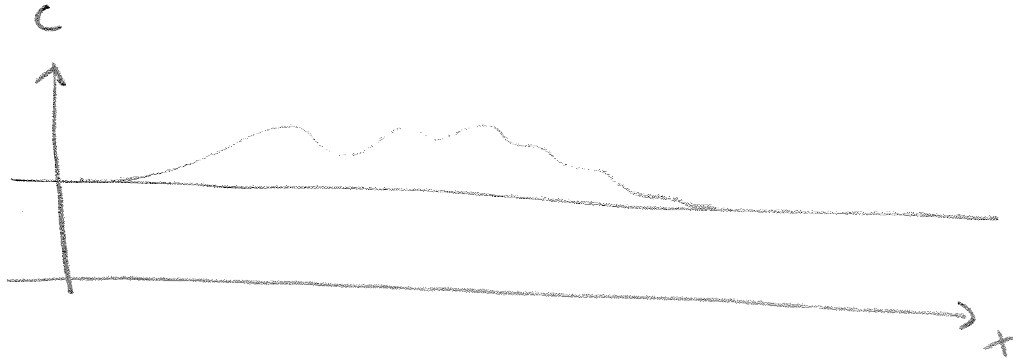
$$(1) \qquad \frac{1}{c(x)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \delta_{x_0}(x)\,\delta(t)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

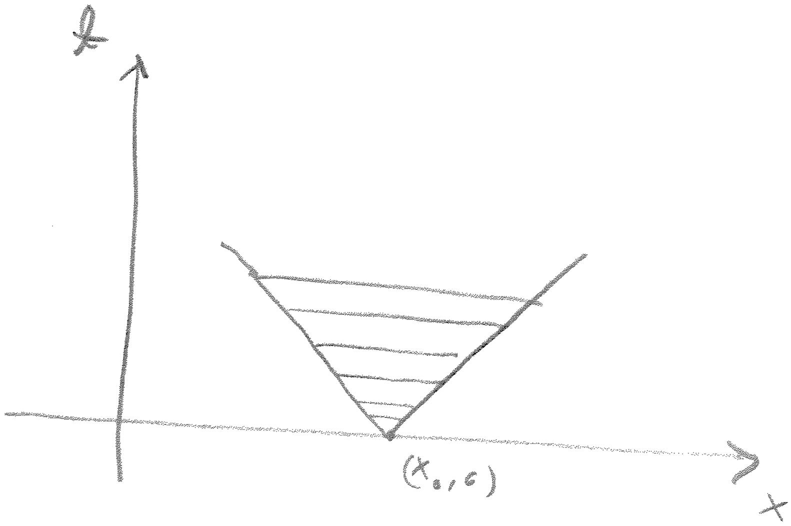
$$u(x,t)\Big|_{\{(x,t)\,:\, t<0\}} = 0$$

missä aallonnopeus $c(x)$ toteuttaa

$$c(x) - 1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$



supp (u)



ratkaisun riippuvuutta x_0:sta merkitään

$$u = u(x, t; x_0).$$

<u>Huom</u> $u(x, t; x_0) = G(x, t, x_0, 0)$, missä G on greenin funktio. Olemassaoloa pohditaan myöhemmin.

Olkoon

$$\hat{u}(x, \omega; x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(x, t; x_0)\, dt := \mathcal{F}_{t \to \omega} u$$

Fourier-muunnos ajan suhteen. Lyhyt lasku osoittaa, että

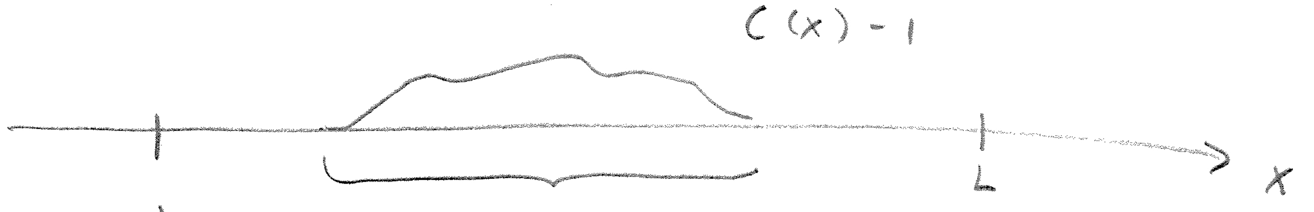
(2) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{u}(x, \omega; x_0) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega; x_0) = \delta(x - x_0)$$

$$= \mathcal{F}_{t \to \omega}(\delta(t)) \cdot \delta(x - x_0)$$

$$\mathcal{F}_{t \to \omega}(\delta(t)) = 1$$

Mitä tapahtuu ehdolle $u|_{t<0} = 0$

15)



$\mathrm{supp}(C(x)-1) \subset [-L, L]$,
$x_0 \in [-L, L]$

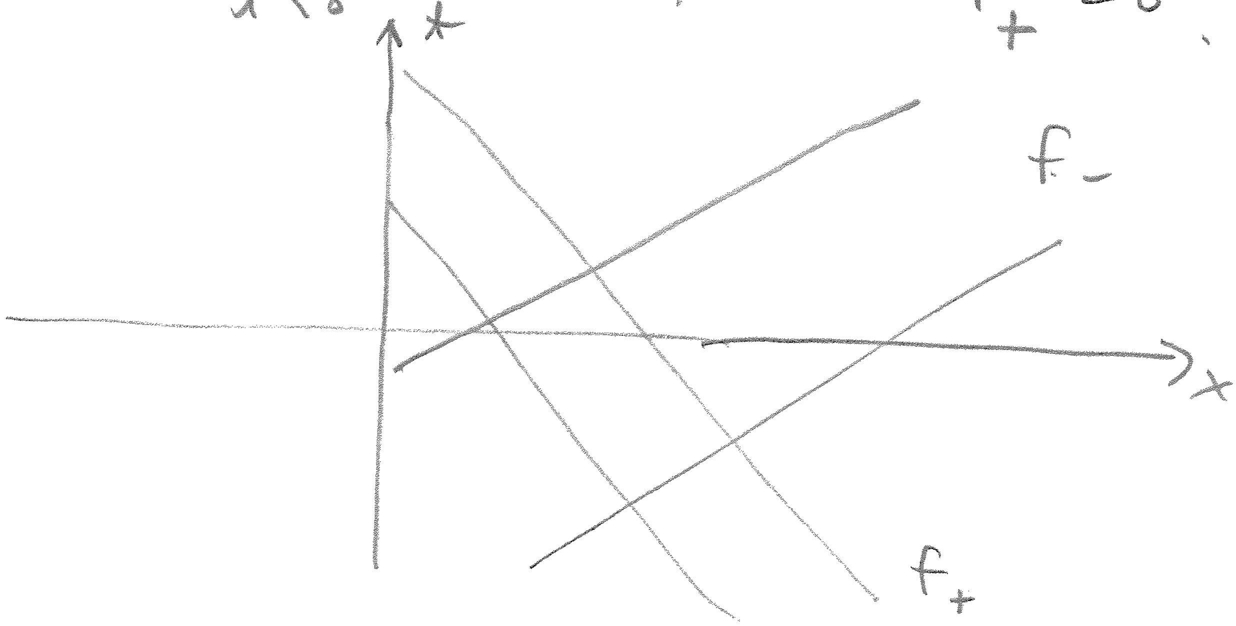
Alueessa $x > L$ (ja $x < -L$)
yhtälö on muotoa

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\, u(x,t) = 0$$

Joten L4-kurssin nojalla $u(x,t)$ on d'Alembertin kaavan osoittamaa muotoa

$$u(x,t) = f_+(x+t) + f_-(x-t), \quad x > L$$

Koska $u|_{t<0} = 0$, pätee $f_+ = 0$.



(6)

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{c(x)^2}\right)\hat{u}(x,\omega;x_0) = \delta(x-x_0), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x} \pm i\omega\hat{u}\right) = 0 \end{cases}$$

Yhtälön (6) ratkaisun olemassaolo on esitetty kurssilla L4.

- <u>Inversio-ongelma</u> Oletetaan, että $c(x)$ tunnetaan kun $x \in [0,\infty)$. Sijoitetaan pisteeseen $x_0 = 0$ hetkellä $t = 0$ ahustinen pistelähde ja mitataan aalto

$$u(x,t;x_0)\Big|_{x=0}, \quad t \geq 0.$$

- Voidaanko $c(x)$ määrätä tästä datasta?

Oletamme seuraavassa $c(x) = 1$ kun $x > 0$.

Vrt: maaperän luotaaminen

(8)

Siispä $u(x,t;x_0) = \begin{cases} f_-(x-t) & \text{kun } x>L \\ \tilde{f}_+(x+t) & \text{kun } x<-L \end{cases}$

Joten

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t;x_0)\Big|_{x=L} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t,x_0)\Big|_{x=-L} = 0$$

josta

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\omega\right) \hat{u}(x,\omega;x_0)\Big|_{x=L} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\omega\right) \hat{u}(x,\omega,x_0)\Big|_{x=-L} = 0.$$

Vaihtoehtoinen, heikompi muoto "kausaalisuudelle taajuuspuolella" on säteilyehto

$$(5) \quad \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \pm i\omega\hat{u}\right)(x,\omega;x_0) = 0.$$

Taajuuspuolen greenin funktio toteuttaa siis

$$(6) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c(x)^2}\right) \hat{u}(x,\omega;x_0) = \delta(x-x_0), \\ \qquad x \in [-L,L] \\ \text{ja reuna-ehdot (4)} \end{cases}$$

(7) kaikilla $L > L_0$ tai

Tarkastellaan aluksi vakioavaruutta $c(x) \equiv 1$

Tällöin funktio

(8) $$u_{in}(x,\omega;x_0) = g(x-x_0,\omega) := \frac{e^{-i\omega|x-x_0|}}{2i\omega}$$

toteuttaa yhtälön (6) (tai (7)).

Käytämme seuraavaa terminologiaa

u_{in} = Tuleva aalto (in $\widehat{=}$ incident)

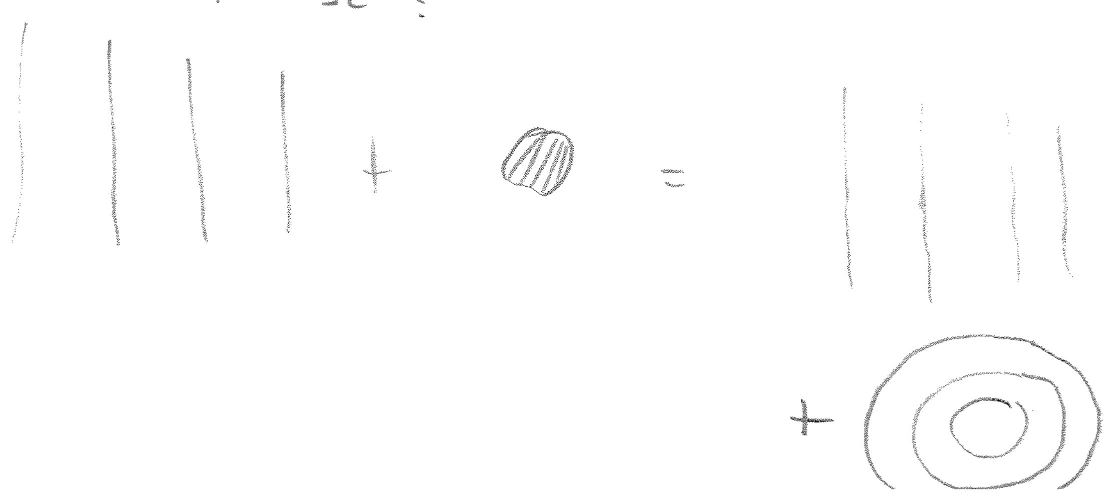
$a(x) = \frac{1}{c(x)^2} - 1$ = sirottaja tai tyhjän avaruuden perturbaatio

$u_{Tot} = u$ = totaaliaalto

$u_{sc} = u - u_{in}$ = sironnut aalto

Ajatus on, että sironnut aalto syntyy sirottajan aiheuttamasta häiriöstä.

Kysymys: miten "varjo" hajoitetaan muotoon $u = u_{in} + u_{sc}$?



Merkitään

$$\frac{1}{c(x)^2} = 1 + a(x).$$

Tällöin

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2(1 + a(x))\right](u_{in} + u_{sc}) = \delta_{x_0}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \omega^2\right) u_{in} = \delta_{x_0}$$

antavat

(9) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\right) u_{sc}(x, \omega; x_0) = F(x)$$

$$= -\omega^2 a(x) (u_{in} + u_{sc})(x, \omega; x_0).$$

Koska u_{in} ja u_{tot} toteuttavat "reunaehdon" (4) ja säteilyehdon (5)

(10) $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\omega\right) u_{sc}(x, \omega; x_0) = 0$$

(20)

Nyt reuna-arvo ongelman (9) ja (4) ratkaisu on

(11) $$u_{sc}(x,\omega;x_0) = -\int_{\mathbb{R}} g(x-y,\omega)\,\omega^2 a(x)\,(u_{in}+u_{sc})(y,\omega;x_0)$$

$\uparrow$ tai $[-L,L]$

kts L4-kurssi, tai sijoita (11) yhtälöön (9) ja reuna-arvoon (4) tai (5)

Myöhemmin kurssilla tutkimme inversio-ongelman ratkeavuutta täsmällisesti.
Nyt teemme approksimaation: oletetaan, että $a(x)$ on pieni. Tällöin sironnut aalto on pieni suhteessa tulevaan aaltoon,

$$u_{in} + u_{sc} \approx u_{in},$$

jolloin

$$u_{sc}(x) \approx -\int_{\mathbb{R}} g(x-y,\omega)\,\omega^2 a(x)\,u_{in}(y,\omega;x_0)\,dy.$$

Tätä kutsutaan Bornin approksimaatioksi tai 1. kertaluvun sironnan approksimaatioksi

(21)

Nyt, koska $a(x) = 0$ kun $x > 0$

$$u_{sc}(x, \omega; x_0)\Big|_{x = x_0 = 0}$$

$$\approx - \int_{\mathbb{R}_-} \frac{e^{-i\omega|0-y|}}{2i\omega} \cdot \omega^2 a(y) \frac{e^{-i\omega|0-y|}}{2i\omega} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\omega y} a(y) dy = \frac{1}{4} \hat{a}(-2\omega)$$

Saamme approksimaation ($\xi = -2\omega$) $a(x)$:lle Fourier-muunnoksen käänteiskaavasta:

$$a(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot \xi} \left(4\, \hat{u}_{sc}(0, -\tfrac{\xi}{2}; 0) \right) d\xi$$

missä $\hat{u}_{sc} = \hat{u}_{tot} - \hat{u}_{in}$

$\uparrow$ mitattu, $\uparrow$ tunnettu.

Vrt: Somersalo–Päivärinta, Ola–Päivärinta–Serov.