

Teknillinen korkeakoulu

Mat-1.3345 Differentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmat

Lassas/Helin

Harjoitus 2

Ke 27.9.2006 klo 14-16 U345

1. Osoita, että kuvaus $T : u(x_1, x_2) \mapsto u(x_1, 0)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi

$$T : H^s(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^s(\mathbb{R}), \quad s > \frac{1}{2}.$$

2. Osoita, että $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ on tiheä.
3. Osoita, että kuvaus $I : u \mapsto u$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi

$$I : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R}),$$

missä $C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ jatkuva ja rajoitettu}\}$ ja $\|u\|_{C_b} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$.

4. Etsi ainakin kaksi distribuutiota $g(x, t)$, joille

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2) g(x, t) = \delta_{(0,0)}(x, t).$$

Vihje: $\partial_s H(s) = \delta(s)$.