Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

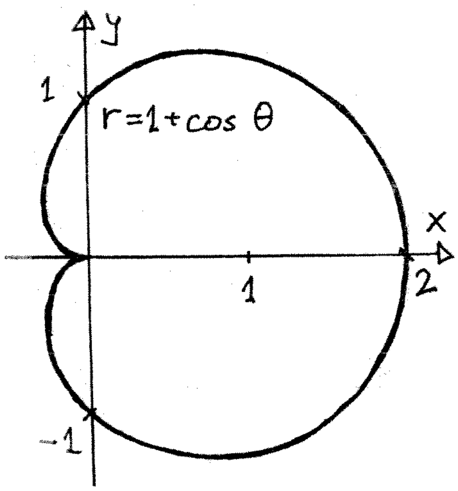
Turbotentamen 16.5.2008

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes för sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes för första gången våren -06; 10sp) som ni skriver.
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.

Vid denna turbotentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga! På baksidan finns en del FORMLER givna.

MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 2, 4, 7, 9 och 10.



1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$. Visa att $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$.

2. a) Beräkna arean hos området innanför kardioidkurvan, som i polära koordinater ges av $r = 1 + \cos\theta$.
   b) Beräkna båglängden av kardioidkurvan $r = 1 + \cos\theta$.
   (Om ett plant område har arean A och dess begränsningskurva har båglängden O, så är $O^2/A \geq 4\pi$ med likhet endast om området är en cirkelskiva. Detta ger en kontrollmöjlighet.)

3. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ är en konvergent överharmonisk serie, så den har en summa S. Bestäm hur stort N måste väljas för att delsumman $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$ skall approximera summan S med ett fel som är $<1/100$.
   (Med metoder från Grundkurs 3 kan man beräkna summan S exakt också: $S = \pi^4/90 \approx 1.08232323$. Använd gärna detta efteråt för att *kontrollera* svaret.)

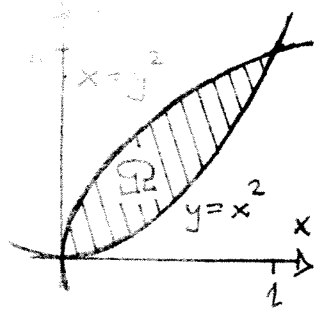
4. Visa att funktionen $h(x, y) = x \cdot \cos(x - y) + y \cdot e^{x-y}$ satisfierar den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = c \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ för ett visst värde på konstanten c samt bestäm detta c-värde.

5. Två ytor säges skära varandra vinkelrätt i en punkt, om deras normalvektorer är vinkelräta i punkten. I vilka punkter skär den hyperboliska paraboloiden (sadelytan) $f(x, y, z) = xy - z = 0$ och den elliptiska paraboloiden $g(x, y, z) = 3y^2 + z^2 - x = 0$ varandra vinkelrätt?

6. Bestäm maximala och minimala värdet hos funktionen $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ på ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$.

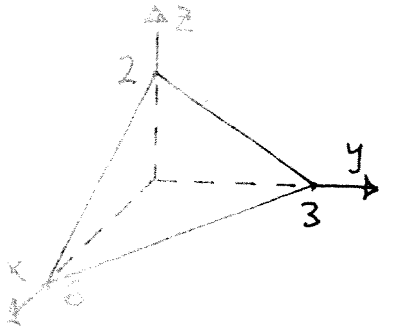
Fortsättning på baksidan.

7. Det plana området Ω i figuren till höger begränsas av parabolerna $x = y^2$ och $y = x^2$. Ω är alltså symmetrisk kring linjen $x = y$ och dess area är naturligtvis $1/3$. I punkten (x, y) har Ω area-densiteten $\delta(x, y) = 5x + 6y^2$. Visa att trots att area-densiteten inte är symmetrisk kring linjen $x = y$, så är Ω:s tyngdpunkt ända på denna linje.



8. $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, då $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
   a) Visa att $div(\vec{F}) = \nabla \bullet \vec{F} \equiv 0$ i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
   b) Visa att $rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} \equiv \vec{0}$ i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
   c) Beräkna $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, då C är enhetscirkeln i xy-planet genomlupen ett varv moturs.

9. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\partial V} \vec{G} \bullet \widehat{N}\, dS$, där $\vec{G}(x, y, z) = 3x\vec{i} + 4z\vec{k}$, V är tetraedern i figuren till höger och $\widehat{N}$ är utåtriktade enhetsnormalen på tetraederns slutna begränsningsyta ∂V
   a) genom att omvandla den till en volymsintegral med hjälp av divergenssatsen (Gauss' sats)
   b) direkt som en ytintegral.



10. Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-1/2}$ med ett rationellt tal så att felet till absolutbeloppet är <0.005. ($e^{-1/2} \approx 0.60653$. Använd gärna detta efteråt för att *kontrollera* svaret.)

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$, $\sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2$,
$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$.

Glöm inte att fylla i kursutvärderingen på hemsidan. Denna turbotentamen kan diskuteras ikväll under något lämpligt bord. Ha en trevlig sommar och tack för det gångna läsåret! Georg M.