Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

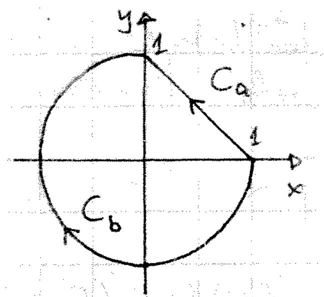
Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 3, 6.5.2009

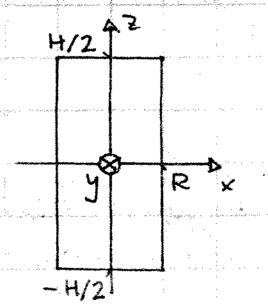
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng!
Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga tentamensvakten!

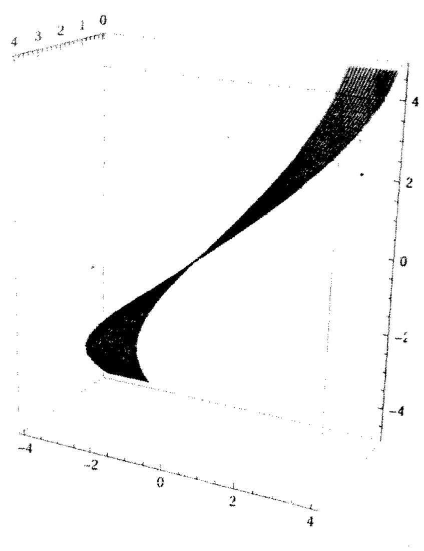
1. a) $\vec{F}(x,y,z) = (e^{yz} + x^3)\vec{\imath} + (2y + \cos(xy) + z^2)\vec{\jmath} + (yz^2 - 2z + \ln(1+x^2))\vec{k}$. Beräkna $div(\vec{F}) = \nabla \bullet \vec{F}$ och $grad(div(\vec{F})) = \nabla(\nabla \bullet \vec{F})$. (1p.+1p.)
   b) Visa att om $\Phi(x,y,z)$ är ett skalärfält av klass C^2 i $\mathbf{R}^3$, så är $rot(grad(\Phi)) = curl(grad(\Phi)) = \nabla \times (\nabla\Phi) \equiv 0$. (2p.)
   c) Visa att om $\vec{G}(x,y,z) = G_1(x,y,z)\vec{\imath} + G_2(x,y,z)\vec{\jmath} + G_3(x,y,z)\vec{k}$ är ett vektorfält av klass C^2 i $\mathbf{R}^3$, så är $div(rot(\vec{G})) = div(curl(\vec{G})) = \nabla \bullet (\nabla \times \vec{G}) \equiv \vec{0}$. (2p.)



2. $\vec{F}(x,y) = xy\vec{\imath} + (2x+3y)\vec{\jmath}$. Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, då kurvan C går från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$
   a) längs en rät linje (3p.)
   b) längs den längre bågen av enhetscirkeln (3p.)
   (Se den övre figuren till höger.)



3. Tröghetsmomentet I_L med avseende på en axel L hos en kropp W med densiteten $\delta(x,y,z)$ ges av integralen $I_L = \iiint_W \delta(x,y,z) \cdot (D(x,y,z))^2 \cdot dV$, där $D(x,y,z)$ är (vinkelräta) avståndet från volymselementet dV till axeln L.
   Vi har en homogen rät cirkulär cylinder med radien R, höjden H och den konstanta densiteten δ_0.
   a) Bestäm cylinderns tröghetsmoment med avseende på symmetriaxeln (z-axeln i den mittersta figuren t.h.). (3p.)
   b) Bestäm cylinderns tröghetsmoment med avseende på en axel genom mittpunkten, vinkelrät mot symmetriaxeln (t.ex. x- eller y-axeln i den mittersta figuren t.h.). (3p.)
   (Gott råd: med tanke på kroppens form kan cylindriska koordinater vara lämpliga.)



4. Helicoiden (spiralrampen) S i den nedre figuren t.h. ges på parameterform av $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{\imath} + u\sin v\vec{\jmath} + 3v\vec{k}$, $\sqrt{7} \le u \le 4, -\pi/2 \le v \le \pi/2$. Beräkna $\iint_S x \cdot dS$. (6p.)

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \cos^2\phi = \frac{1}{2}(1+\cos(2\phi)), \sin^2\phi = \frac{1}{2}(1-\cos(2\phi))$.

Glöm inte att fylla i kursutvärderingen på kursens hemsida!
Tack för det gångna läsåret och trevlig sommar! Georg M.