

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 1, 2009-02-26

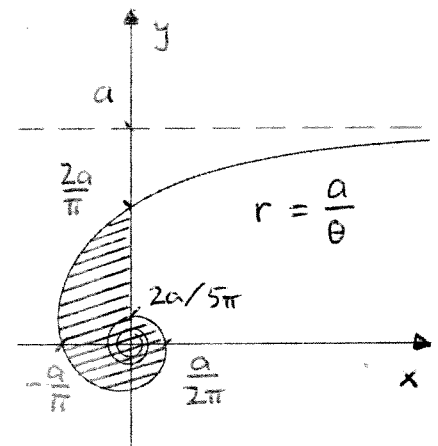
Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng!

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.

Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

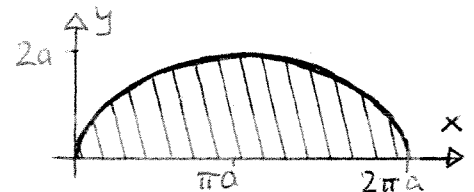
- Om f och g är differentierbara reellvärda funktioner, definierade i \mathbf{R} , så gäller som bekant att $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. Låt nu $\vec{u}(t) = u_1(t)\vec{i} + u_2(t)\vec{j} + u_3(t)\vec{k}$ och $\vec{v}(t) = v_1(t)\vec{i} + v_2(t)\vec{j} + v_3(t)\vec{k}$ vara 3-vektörvärda funktioner, definierade i \mathbf{R} . Visa följande analogi till deriveringsformeln ovan: $(\vec{u} \cdot \vec{v})'(t) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$. (3p.)



- Kurvan i figuren till höger är en *hyperbolisk spiral* och ges på polär form av $r(\theta) = a/\theta; a, \theta > 0$. Den har en horisontell asymptot $y = a$, eftersom $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r(\theta) \sin \theta = a$. Beräkna arean hos det i figuren skuggade området, som begränsas av y -axeln och spiralen. (3p.)

- Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \dots$ konvergerar. Förklara hur vi får resultatet. (2p.)
 - Approximera seriens summa så att felet i approximationen är till absolutbeloppet $< \frac{1}{100}$. Förklara hur vi kan veta, att felet inte är större. (4p.)

- En båge av cykloiden ges på parameterform av $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$. Beräkna volymen V hos kroppen som uppstår, då det skuggade plana området i figuren till höger, som begränsas av cykloidbågen och x -axeln roterar kring x -axeln. (6p.)



- Beräkna arean A hos begränsningsytan till kroppen i föregående uppgift. (Kontrollmöjlig, om även uppgift 4 lösts: om en kropp har volymen V och dess begränsningsyta har arean A , så är $A^3/V^2 \geq 36\pi$ med likhet endast om kroppen är ett klot.) (6p.)

Nyttiga (?) formler:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \sin(2t) = 2 \sin t \cos t, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2.$$