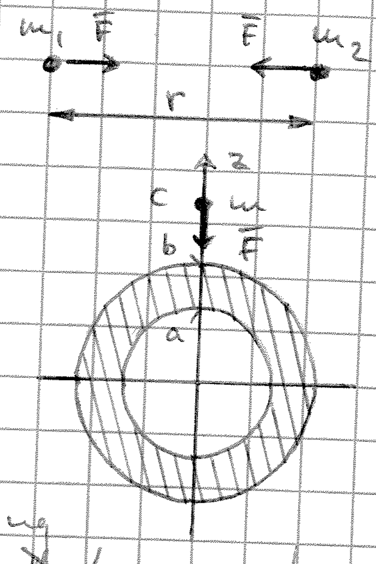
Gk2 i Matematik, hemtal v16/10 Matsalo

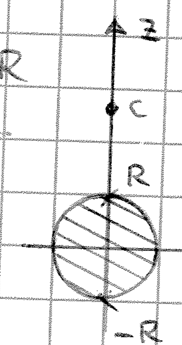


Newtons gravitationslag ger att två punktmassor m_1 och m_2 på avståndet r från varandra attraherar varandra med en kraft $\bar{F}$, riktad som i den övre figuren med $|\bar{F}| = Gm_1m_2/r^2$ där G är den universella gravitations-konstanten (betecknad k i Adams; $G \approx 6.670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$).

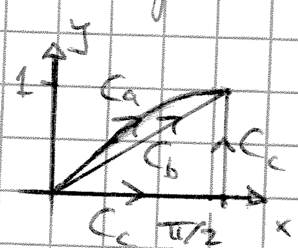
Vi använder början av måndagens övning till att bestämma kraften, med vilket ett homogent sfäriskt skal påverkar en punktmassa m utanför (eller inuti) detta skal, analogt med exemplet med gravitationskraften från en cirkulär skiva i kap. 14.7.

Må: D0) Klotet $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z) = \delta_0 \cdot (x^2+y^2+z^2)/R^2$. Bestäm dess massa mha.
a) sfäriska koordinater b) cylindriska koordinater.

D1) En punkt befinner sig på avståndet $c > R$ från mittpunkten hos ett klot med radien R. Visa att punktens genomsnittliga avstånd från klotet är $c + R^2/5c$.
Goda råd: använd lämpligast sfäriska koord. som i figuren t.h. Integrationsordningen $d\theta\, d\phi\, d\rho$ och substituera bort det som ställer till med mest besvär (som vanligt).



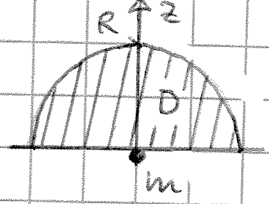
D2) $\bar{F}(x,y) = \pi \sin x\, \hat{i} + (2\pi \sin x - 4x - 7y)\hat{j}$.
Beräkna kurvintegralen $\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$ då C går från origo till $(\pi/2, 1)$
a) längs kurvan $y = \sin x$,
b) rätlinjigt,
c) först längs x-axeln och sedan vertikalt, som i figuren.



V.g. vänd

D3) 15.6.13 i Adams. (I kap. 16.4 kommer vi att få kraftfullare redskap för att beräkna sådana flödesintegraler över slutna, orienterbara ytor. Beräkna dock detta flöde som en flödesintegral (och utnyttja symmetrin).)

Fr: D4a) Bestäm tyngdpunkten hos det homogena halvklotet D med radien R och den konstanta densiteten δ_0 i figuren t.h.



b) Beräkna gravitationskraften, varmed halvklotet påverkar en punktmassa m i klotets mittpunkt (se fig.) analogt med måndagens uppgift med gravitationskraften från ett sfäriskt skal. Observera, att vi inte skulle få samma kraft, om hela massan vore konc. till halvklotets tyngdpunkt.

D5a) Visa att $\nabla \cdot (\bar{F} \times \bar{G}) = (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{G} - \bar{F} \cdot (\nabla \times \bar{G})$ för vektorfält $\bar{F}, \bar{G}$ av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$.

b) Visa att om $\bar{F}$ och $\bar{G}$ är konservativa vektorfält av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$ så är $\bar{F} \times \bar{G}$ källfritt (dvs. $\nabla \cdot (\bar{F} \times \bar{G}) \equiv 0$) och bestäm någon vektorpotential $\bar{H}$ till vektorfältet $\bar{F} \times \bar{G}$ sådan att $\nabla \times \bar{H} = \bar{F} \times \bar{G}$.

I1) Beräkna a) $\int_C \bar{u} \cdot d\bar{r}$ och b) $\int_C \bar{u} \times d\bar{r}$, då $\bar{u}$ är vektorfältet $\bar{u}(x,y,z) = \sqrt{z}\,\hat{i} + x\hat{j} + y^2\hat{k}$ och C är parabeln $x = 2$, $y^2 = z$ från punkten $(2,-1,1)$ till punkten $(2,2,4)$.

I2) $\bar{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\hat{j}$, då $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Visa att $\nabla \cdot \bar{F} \equiv 0$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Visa att $\nabla \times \bar{F} \equiv \bar{0}$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

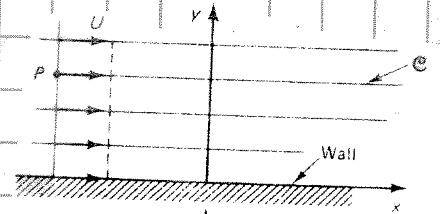
c) Beräkna $\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$, då C är enhetscirkeln i xy-planet genomlöpt ett varv moturs.

13a) Bestäm parametrarna α, β och γ så att vektorfältet $\bar{F} = (2x+z+e^{y}\sin(\alpha x))\hat{i} + (3y - e^{y}\cdot\cos(\alpha x))\hat{j} + (x+\beta y+\gamma z)\hat{k}$ är såväl källfritt som virvelfritt i $\mathbb{R}^3$.

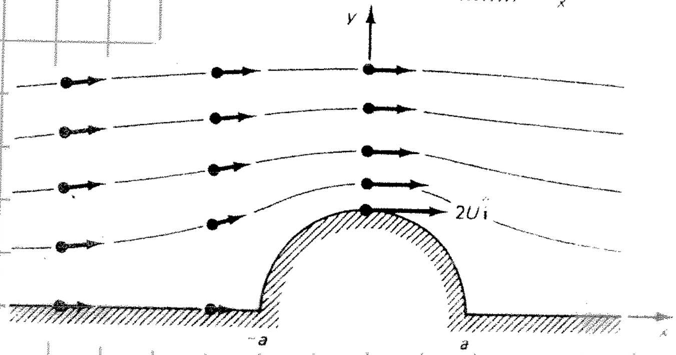
b) Virvelfriheten i $\mathbb{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) skalär potential Φ sådan att $\bar{F} = \nabla\Phi$. Bestäm någon sådan skalär potential Φ.

c) Källfriheten i $\mathbb{R}^3$, som saknar hålrum, medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) vektorpotential $\bar{G}$ sådan att $\bar{F} = \nabla\times\bar{G}$. Använd metoderna i ex 1, kap. 16.2 för att bestämma någon sådan vektorpotential $\bar{G}$.

14) Om vi har en inkompressibel vätska, som strömmar i övre halvplanet $y>0$, kan dess hastighetsfält ges av $\bar{v}(x,y) = U\hat{i}$ som i den övre fig. 4.4.



Om vi lägger en halvcirkulär vall i vätskans väg som i den nedre figuren (fig. stulna ur M.D. Greenberg: Advanced Engineering Mathematics) får vi hastighetsfältet



$$\bar{v}(x,y) = U\cdot\left(\hat{i} + \frac{a^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left((y^2-x^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}\right)\right) \text{ för } x^2+y^2>a,\ y>0.$$

a) $\bar{v}$ är parallell med marken (dvs. $\perp\hat{j}$) då $|x|>a$, $y=0$. Visa att $\bar{v}$ är även parallell med vallen (dvs. ortogonal mot vallens normal) längs vallen och att $\bar{v}=\bar{0}$ endast i de två hörnen $(\pm a, 0)$.

b) Visa att $\bar{v}$ är källfritt, dvs. att $\nabla\cdot\bar{v}\equiv 0$.

15a) Bestäm något vektorfält $\bar{F}\neq\bar{0}$ (inte identiskt lika med nollvektorfältet, det gör inget om $\bar{F}=\bar{0}$ i enstaka punkter) sådant att $\nabla\times\bar{F} = \bar{F}$.

b) Bestäm något vektorfält $\bar{G}\neq\bar{0}$ sådant att $\nabla(\nabla\cdot\bar{G}) = \bar{G}$.