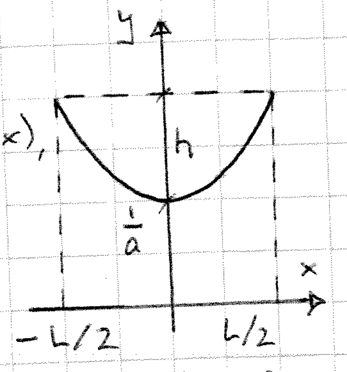
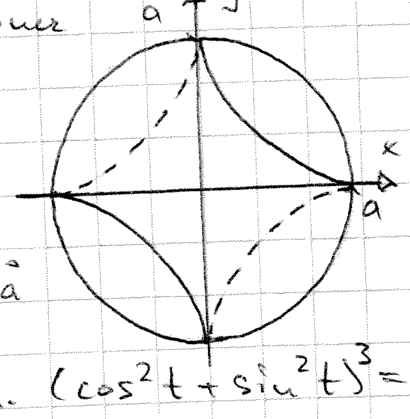
Gk2 i Matematik, hemtal v8/09 Metsalo

Torsdagen 26.2. har vi 1:a mellanförhöret som omfattar kap. 8–11 i Adams med undantag för kap 9.10 i uppl.4 / kap. 9.9 i uppl.6 som behandlar Fourier-serier, kap. 9.10 i uppl.5, som behandlar lösning av ordinära differential-ekvationer mha. serier samt kap. 10.7 i uppl. 5&6, som behandlar matrisräkning mha. Maple. Till mellanförhöret får varken räknare eller tabellsamlingar medtagas.



Om: 1) I kap. 10.2 visas att då en kedja hänger fritt, ges dess ekvation av $y=\frac{1}{a}\cdot\cosh(ax)$, om vi väljer koordinaterna lämpligt. En kedja med längden L, upphängd som i figuren, är horisontell, men en kedja med längden $L+\Delta L$ sänker sträckan h i mitten. Visa mha. Maclaurin-utvecklingar att om $\Delta L \ll L$ (mycket mindre än), så är $h \approx \sqrt{\frac{3}{8}\cdot L\cdot \Delta L}$.

2a) 11.1.14 (kurvan kallas Vivianis kurva)



b) Svakar har efter noggranna observationer kommit fram till att "sömmen" hos en tennisboll med radien a av allt att döma har en projektion i form av en asteroid: $x(t)=a\cos^3 t$, $y(t)=a\sin^3 t$, $xyz \geq 0$. Ge sömmen på parameterform (speciellt $z(t)$; $x(t)$ och $y(t)$ är ju redan givna. $(\cos^2 t+\sin^2 t)^3 = 1^3 = 1$ kan underlätta) och bestäm sömmens tangentlinje i $\mathbb{R}^3$ i punkten, som svarar mot parametervärdet $t=\pi/6$.

3a) Bestäm längden hos rymdkurvan $\bar{r}(t)=3t\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ från punkten $(-3,3,-2)$ till punkten $(6,12,16)$.

b) Bestäm längden hos överhandsknopen $\bar{r}(t) = (2+\cos(3t/2))\cdot\cos t\,\hat{i} + (2+\cos(3t/2))\cdot\sin t\,\hat{j} + \frac{\sqrt{2i}}{5}\cdot\sin(3t/2)\,\hat{k}$. Rita gärna knopen mha. ParametricPlot3D i Mathematica.

V.g. vänd

4) 11.5.13. Mha. detta får vi metoder att göra skisser av ellipser med enbart passare och linjal.

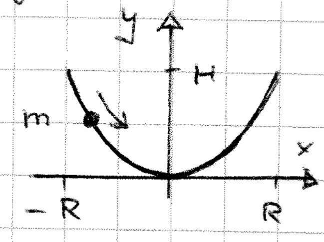
Demo: Vi visar att kurvan $\bar r(t)=x(t)\hat i + y(t)\hat j$ i planet har <u>evolutan</u> $\bar r_c(t)=\xi(t)\hat i+\eta(t)\hat j$, där

$$\xi(t)=x(t)-y'(t)\cdot\frac{(x'(t))^2+(y'(t))^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}$$ och

$$\eta(t)=y(t)+x'(t)\cdot\frac{(x'(t))^2+(y'(t))^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}$$

(förutsatt att kurvan är "tillräckligt snäll").

Fr: 1) En pärla med massan m startar från vila från punkten $(-R,H)$ och glider (inte rullar) längs en tråd böjd till parabeln $y=Hx^2/R^2$ till punkten (R,H) utan friktion under inverkan av tyngdkraften $\bar F=-mg\hat j$. Bestäm pärlans fart och centripetalacceleration i



a) punkten $(0,0)$ b) punkten $(R/2, H/4)$.

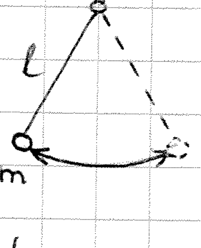
2) 11.R.7 (Review): Klotoiden

3) Rymdkurvan $\bar r(t)=t^2\hat i+2t\hat j+\ln t\,\hat k$ närmar sig negativa z-axeln då $t\to 0^+$ och blir alltmer parallell med positiva x-axeln då $t\to\infty$, eftersom x-koordinaten växer mycket snabbare än y- och z-koordinaten, då parametern t växer över alla gränser.

a) Bestäm längden hos den delen av kurvan, som finns mellan punkten, där kurvan skär xy-planet och punkten, som svarar mot $t=2$.

b) Bestäm minimala krökningsradien hos kurvan.

4) 11.R.11 (använd formlerna från onsdagens demo ovan) Tillsammans med dagens demo nedan ger denna uppgift den <u>isokrona pendeln</u>. För en vanlig matematisk pendel beror svängningstiden nämligen på utslagsvinkeln, även om den är nästan konstant för små svängningar.



Demo: 11.Ch.4 (Challenging Problems): Tautokronen