Gk2 i Matematik, hemtal fr v18/08 Metsalo

Detta är sista hemtalsomgången. 3:e mellanförhöret äger rum on 7.5. kl. 16–19 och omfattar kap. 14–16 samt appendix IV / kap 17 (uppl.5 / uppl. 4 och 6) i Adams. Fr 16.5. kl. 8–12 är det turbotentamen, då det går att antingen ta om ett mellanförhör (3h) eller skriva sluttentamen (4h). Till turbotentamen måste man förhandsanmäla sig.

På insidan finns en tillämpning av differentialekvationer. Studera hur den fysikaliska situationen ger ett system med 2DE, som sedan omvandlas till en enda DE.

1) $\bar{F}(x,y,z) = xyz\,\hat{i} + e^{3x+4y}\cdot\sin(5z)\,\hat{j} + (x^2+y^2+z^2)\,\hat{k}$.

a) Beräkna $\nabla\cdot\bar{F}$ och $\nabla(\nabla\cdot\bar{F})$

b) Beräkna $\nabla\times\bar{F}$ och $\nabla\times(\nabla\times\bar{F})$.

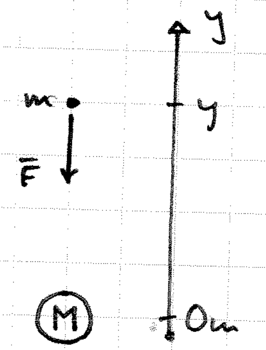
2) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial S}\bar{v}\cdot d\bar{r}$ av vektorfältet $\bar{v}(x,y,z) = 2y\,\hat{i} + x^2\,\hat{j} + 3x\,\hat{k}$ längs randkurvan ∂S till halvsfären $S: x^2+y^2+z^2 = 16,\ z \geq 0$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att omvandla den till en ytintegral över halvsfären S mha. Stokes' sats

c) genom att omvandla den till en ytintegral över cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 16,\ z = 0$ (som ju har samma randkurva som halvsfären) mha. Stokes' sats.

3) Ett föremål med massan m, som befinner sig på avståndet y från jordens mittpunkt, utsätts enligt Newtons gravitationslag och demo fr v14 för kraften $F = -GMm/y^2$, där G är universella gravitationskonstanten (betecknad k i Adams) och M är jordens massa. På jordytan är $F = -mg = -GMm/R^2$, där R är jordens radie, så $GM = gR^2$.



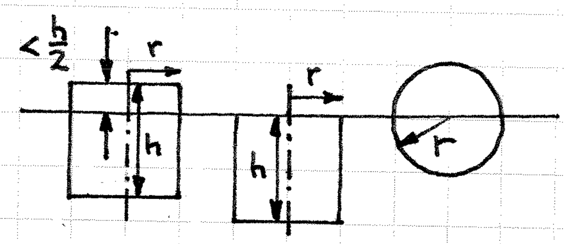
Höjden $y(t)$ hos ett föremål som skjuts upp från jordytan satisfierar alltså diff.ekvationen $my''(t) = -GMm/(y(t))^2$ eller $y''(t) = -gR^2/(y(t))^2$, om vi bortser från luftmotstånd, månens dragningskraft &c. Denna DE har en lösning $y(t) = a\cdot t^r$, där a och r är positiva konstanter och $r < 1$.

(Forts. på baksidan)

3) (forts.) Denna lösning svarar mot att föremålet flyger bort mot oändligheten (eftersom $r > 0$), men allt långsammare (eftersom $r < 1$). Bestäm a och r och visa att för att få denna lösning måste uppskjutningshastigheten vid jordytan (där $y = R$, vilket inte behöver svara mot $t = 0$ s; vi behöver inte starta vår klocka i uppskjutningsögonblicket) vara $y' = \sqrt{2gR} = \sqrt{2GM/R}$ (flykthastigheten).

4) Från demo för v14 fick vi också tyngdkraftsaccelerationen inuti ett homogent klot. Antag att jorden är homogen och borra ett hål längs axeln, i vilket vi släpper ned ett föremål med massan m. Beräkna mha. 2:a ordningens linjära ODE från kap. 3.7 (Gk1) hur lång tid det tar innan föremålet återvänder. Bortse från luftmotstånd, använd att $g \approx 9.81\,m/s^2$ vid jordytan och att $R \approx 40.000$ km. (Detta är egentligen ett specialfall av uppg. 8C7 på sid 517/470 (uppl. 4&5/uppl. 6) i Adams.)

Demo: a) Mha. Archimedes' princip från förra fredagen och 2:a ordn. linjära ODE från kap. 3.7 (Gk1) bestämmer vi svängningstiden hos en cylindrisk träkloss med densiteten $\delta_T > \delta_V/2$ (så mer än halva klossen är under vatten vid vila), om klossen trycks ned i vattnet och släpps, så den börjar guppa, om det inte förekommer någon dämpning (vilket naturligtvis är rätt orealistiskt i detta sammanhang).



b) Vi bestämmer svängningstiden för små svängningar hos ett träklot med $\delta_T = \delta_V/2$, om det inte förekommer någon dämpning mha. linearisering. Samma metod kan användas för att bestämma svängningstiden för små svängningar hos allmänna kroppar också (om vi inte har någon dämpning).

Fyll i kursutvärderingen på kursens hemsida.
Tack för det gångna läsåret!

Georg M.