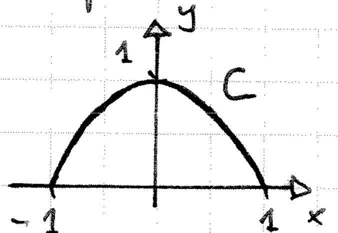
Gk2 i Matematik, hemtal v16/08 Metsalo

Sista datorövning äger rum to 17.4. Uppgifterna kommer att delas ut separat. På insidan finns ett supplement om differentialekvationer.



On: 1a) 15.1.3 b) 15.1.5 c) 15.1.6

2) Den plana kurvan $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2, -1 \le x \le 1\}$ till höger har i punkten $(x, y) \in C$ längddensiteten $\delta(x, y) = x^4 + y$. Av symmetriskäl finns C:s tyngdpunkt på y-axeln. Bestäm C:s längd, massa och tyngdpunkt. Låt gärna Mathematica göra slavgörat. (Jämför med uppg. 1, on v14 och uppg. 2, on v15. Då studerade vi ~~ett~~ plant område, nu studerar vi kurvan.)

3) Beräkna kurvintegralen $W = \int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$, där C är den räta linjen från origo till punkten (1, 2, 3) och $\bar{F}(x, y, z) = (e^z + \frac{1}{1+x^2})\hat{i} + 2yz\hat{j} + (xe^z + y^2)\hat{k}$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att visa att $\bar{F}$ är konservativt, bestämma $\bar{F}$:s potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ sådan att $\nabla\Phi = \bar{F}$ och beräkna W mha. potentialfunktionen.

4) Beräkna a) $\int_C \bar{u} \bullet d\bar{r}$ och b) $\int_C \bar{u} \times d\bar{r}$ då $\bar{u}$ är vektorfältet $\bar{u}(x, y, z) = \sqrt{z}\,\hat{i} + x\hat{j} + y^2\hat{k}$ och C är parabeln $x = 2$, $y^2 = z$ från punkten (2, -1, 1) till punkten (2, 2, 4).

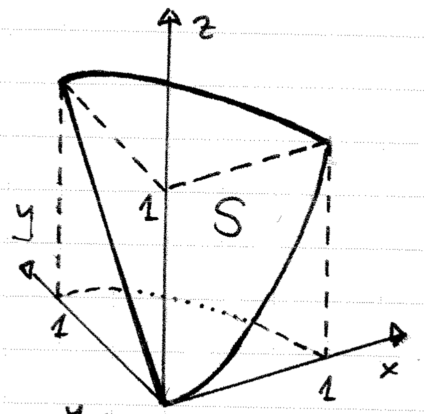
Gott råd: parametrisera kurvan.

Demo: Ytor ges inte alltid som grafer av funktioner, dvs. som $z = f(x, y)$ eller på parameterform, dvs. som $\bar{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$. Vi härleder formler med vilkas hjälp vi iblan kan integrera över ytor på formen $F(x, y, z) = 0$.

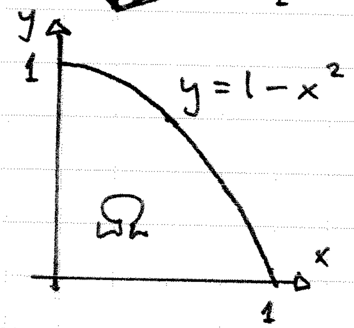
Fr: 1) Bestäm massan hos rotationsparaboloiden $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le (3a)^2, z = 2a \cdot (1 - \frac{x^2 + y^2}{(3a)^2})\}$, om area-densiteten är $\delta(x, y, z) = \delta_0 \cdot z / 2a$. (Jämför med uppg. 4, on v15. Då studerade vi en kropp, nu studerar vi ytan.)

Forts. på baksidan

2) Ytan S i den övre figuren till höger är den delen av den paraboliska cylindern $z = x^2 + y$, som har området Ω i den nedre figuren som sin projektion på xy-planet. I punkten $(x, y, z) \in S$ är ytans areadensitet $\delta(x, y, z) = xz$. Bestäm ytans massa.

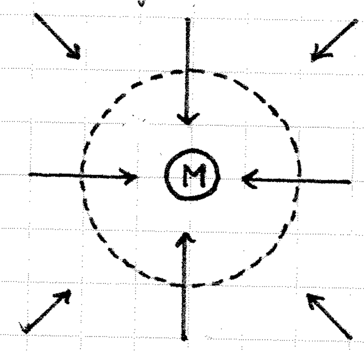


3) $\bar{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} = u \cdot \cos v\,\hat{i} + u \cdot \sin v\,\hat{j} + 8v\hat{k}$, $u \in [6, 15]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$ ger en yta på parameterform, nämligen en helicoid (en spiralramp). Beräkna dess area.



4) 15.6.7 (Gott råd: parametrisera ytan)

Demo: Vi beräknar flödet av gravitationsaccelerationsfältet utanför en punktmassa M (eller enligt demo fr v14: utanför en sfäriskt symmetrisk kropp med massan M) in genom en (tänkt) sfäryta med radien R och med mittpunkten i punktmassan M.



(Jämför med ex. 1 kap. 15.6.) Kombinerat med Gauss' sats (divergenssatsen) får vi senare ett intressant resultat för allmänna slutna ytor och allmänna massfördelningar.