Gk 2 i Matematik, hemtal v10-11/08 Mikaelo

På baksidan beskrivs <u>Newtons metod</u> för att finna (approximativa) gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta.

Ou: 1) Antag, att $g(u,v)$ är av klass $C^2(\mathbb{R}^2)$ och
v10 harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 \equiv 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x,y) = g\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Då är även $h(x,y)$ av klass $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Visa att h är också harmonisk, dvs. att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 \equiv 0$ för $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) Låt $f(t)$ vara en funktion av klass $C^2(\mathbb{R})$, som satisfierar den ordinära differentialekvationen $4t \cdot f''(t) + 6f'(t) - f(t) = 0$. Visa att i så fall satisfierar funktionen $u(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)$ den partiella diff.ekvationen $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = u$. (På detta sätt kan en (svår) PDE där vi söker en funktion av flera variabler ibland omvandlas till en (enklare) ODE där vi söker en funktion av endast en variabel.)

3) Låt $f(x,y) = \ln x + e^y + \sin(xy)$.

a) Bestäm tangentlinjen till kurvan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$ i punkten $(1,0)$.

b) Bestäm tangentplanet till ytan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = z\}$ i punkten $(1,0,1)$.

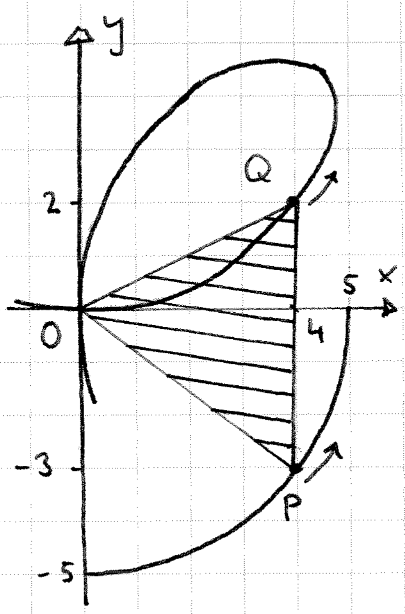
4) Vi studerar ytan $xyz = 2$ i 1:a oktanten (där $x,y,z > 0$). Om vi tar en godtycklig punkt på ytan, så kommer ytans tangentplan i punkten att begränsa en tetraeder tillsammans med de tre koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt bestäm denna volym. (En tetraeder med basarean A och höjden h har som bekant volymen $V = Ah/3$.)

Demo: 12 Ch 3 (Challenging Problems). Detta är den 3-dim. analogin till ex. 10 i kap. 12.5.

Hemtalen för fredag v11 på insidan

Fr: vII

1) Vi studerar en triangel OPQ, där O är fix i origo, P rör sig på cirkeln $x^2+y^2=25$ och Q rör sig på Cartesii blad $x^3+y^3-9xy=0$.



I ett visst ögonblick är P i punkten $(4,-3)$ och rör sig längs cirkeln så dess vertikala hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet), medan Q är i punkten $(4,2)$ och rör sig längs Cartesii blad så dess horisontella hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet). Då är triangelns area 10 (areaenheter) i det aktuella ögonblicket.

a) Hur stor är P:s horis. hastighet (längdenh. per tidsenh.) i det aktuella ögonblicket?

b) Hur stor är Q:s vert. hastighet (längdenh. per tidsenh.) i det aktuella ögonblicket?

c) En triangel med hörnpunkterna $O(0,0)$, $P(a,b)$ och $Q(c,d)$ har som bekant arean $A=|ad-bc|/2$. Hur stor är triangelareans ändringshastighet (areaenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? Ökar eller minskar arean just då?

2) Låt $T(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2+3xy+\ln(x^2+y^2)$.

a) Bestäm T:s gradient ∇T.

b) Visa att $\partial^2T/\partial x^2+\partial^2T/\partial y^2+\partial^2T/\partial z^2\equiv 0$ (T harmonisk)

c) I vilken riktning ökar T fortast i punkten $(0,1,2)$ och hur fort ökar T i den riktningen i den punkten?

d) Hur fort ökar T i riktning mot origo i punkten $(0,1,2)$?

e) Bestäm Taylorpolynomet $P_2(x,y,z)$ av grad 2 av funktionen T utvecklad i punkten $(a,b,c)=(0,1,2)$. Lämna P_2 med potenser av x $(=(x-0))$, $(y-1)$ och $(z-2)$ i stället för att skriva ut det i potenser av x, y och z.

3a) Visa att ekvationen $F(x,y,z) = z\cdot e^x + 2\cos(yz) = 0$ bestämmer funktionen $z = g(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten $(0,0,-2)$. Bestäm g:s Maclaurin-polynom av grad 2 (dvs. Taylor-polyn. utvecklat i origo).

b) Visa att ekvationerna $F_1(x,y,z) = xy + e^{yz} + x^3 z - 3 = 0$ och $F_2(x,y,z) = \cos(y^2 z) + \ln(y + xz) + x^2 - 5 = 0$ bestämmer funktionerna $x = g_1(y)$ och $z = g_2(y)$ implicit i en omgivning av punkten $(2,1,0)$. Bestäm 1:a gradens Taylor-polynom av funktionerna g_1 och g_2 utvecklade i punkten $y = 1$. (På motsvarande sätt kan man även bestämma Taylor-polynom av högre grad av funktionerna g_1 och g_2 utvecklade i $y = 1$.)

4) Antag att $F(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$, att $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ och att $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z \neq 0$ i punkten (x_0,y_0,z_0), så ekvationen $F(x,y,z) = 0$ bestämmer funktionerna $x = X(y,z)$, $y = Y(z,x)$ och $z = Z(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten (x_0,y_0,z_0). Visa att i så fall är
$$\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$
(och bli eventuellt av med en fördom).

Demo: Halvklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 25^2$, $z \geq 0$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z) = 9x + 12y + 20z + 375$ (godtyckliga enheter).
Vi bestämmer alla kritiska punkter för δ i kroppen, på de två begränsningsytorna samt på begränsningsytornas gemensamma begränsningskurva. Likaså avgör vi var δ är högst resp. lägst samt hur hög densiteten δ är där.

Nedan beskrivs Newtons metod för att finna (approximativa) gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta. Detta är en utvidgning av kap. 4.6, då vi hade 1 ekvation med 1 obekant och även av kap. 13.6 i Adams, där man arbetar med 2 ekvationer och 2 obekanta.

<u>Newtons metod</u> för n ekvationer med n variabler:

Om $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är n st. funktioner av n variabler (som vi tänker oss bildar en n-kolumnvektor) och vi söker en lösning till

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}) = 0 \\ f_2(\bar{x}) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

(ett ekvationssystem med n ekvationer och n obekanta)

kan iterationsschemat

$$\bar{x}_{m+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{m+1} = \bar{x}_m - \left(J(\bar{x}_m)\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix} =$$

Matris-inverteringen

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_m - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix}$$

med lämpligt begynnelsevärde $\bar{x}_0$ (en n-kolumnvektor) konvergera till ett gemensamt nollställe för de n st. funktionerna $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Precis som i fallet med 1 ekvation med 1 variabel kan Newtons metod också divergera. Konvergens förutsätter bra begynnelsevärden, men om Newtons metod konvergerar, tenderar den att konvergera snabbt.