Gk2 i Matematik, hemtal v4/08 Metsalo

På insidan av detta blad finns de 9 icke-degenererade 2:a-gradsytorna sammanställda. En del av dem finns också i montrarna utanför matematik-biblioteket.

Ov: 1a) 8.1.2 b) 8.1.10 c) 8.1.12 i Adams

2) Vi studerar en ellips E och en hyperbel H i xy-planet. E:s toppar är H:s brännpunkter och H:s toppar är E:s brännpunkter. E:s ekvation är $x^2/5^2 + y^2/4^2 = 1$. Bestäm H:s ekvation samt ekvationen för dess asymptoter på formen $y = ax + b$.

3) Vi studerar kurvan $(x, y) = \left(\frac{t}{4} \cdot (t-9)(t-24),\ t(t-24)\right)$.

a) Bestäm punkterna, där kurvan har horisontell eller vertikal tangent.

b) Kurvan skär sig själv i origo. Bestäm lutningen hos tangentlinjerna där.

c) Visa att origo är den enda punkten, där kurvan skär sig själv och skissa kurvan.

d) Beräkna arean hos öglan, som kurvan bildar. (Räknaren kan vara till en viss hjälp!)

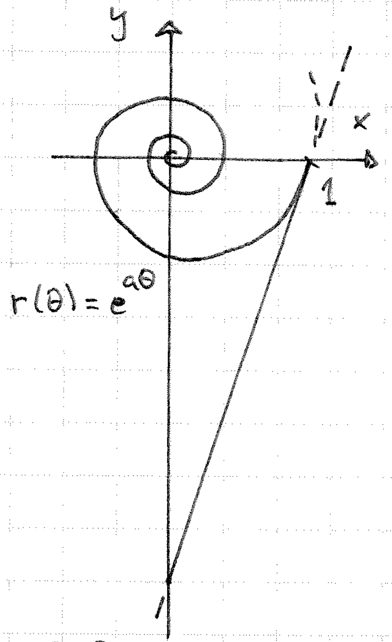
4a) 8.4.9 b) 8.4.10a) c) 8.4.22 i Adams

Anmärkning: högskolematematik går inte ut på att lära sig att slå upp rätt formel i någon lärobok eller formelsamling! För b)- och c)-delen finns en kontrollmöjlighet: Om en kropp $\mathcal{D}$ har volymen V och dess begränsningsyta har arean A, så gäller att $A^3/V^2 \geq 36\pi$ med likhet endast om kroppen är ett klot (och om ett plant område Ω har arean A och dess begränsningskurva har omkretsen O, så gäller att $O^2/A \geq 4\pi$ med likhet endast om Ω är en cirkelskiva). Att visa detta ligger dock utanför kursen.

Demo: Vi analyserar kägelsnittet $4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24y = 0$. Pga. korstermen $-4xy$ måste vi vrida koordinatsystemet innan vi kan komplettera kvadraterna och skriva kägelsnittet på standardform.

Fredagens hemtal på baksidan

Fr. 1) Kurvan $r(\theta) = e^{a\theta}$ kallas för en <u>logaritmisk spiral</u> (i spiralen i figuren är $a > 0$)! Linjen i figuren är spiralens tangentlinje i punkten $(r, \theta) = (1, 0)$ $(\Rightarrow (x, y) = (1, 0))$. Visa att den heldragna delen av spiralen (motsvarande $\theta \leq 0$) har samma längd som den heldragna delen av tangentlinjen, som finns mellan koordinataxlarna.



2) Vi studerar kurvan $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$.

a) Skriv om ekvationen mha. polära koordinater samt skissa kurvan.

b) Visa att kurvan ryms i en kvadrat med sidan 4.

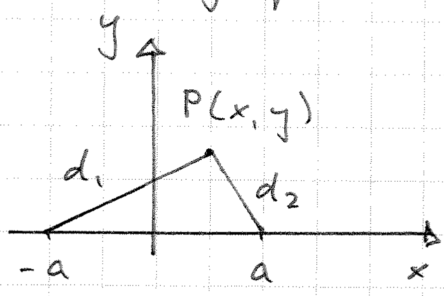
c) Beräkna arean hos området innanför kurvan.

3) Skissa <u>limaçonen</u> $r = 2 - 4\sin\theta$ och beräkna arean hos området, som finns innanför stora öglan men utanför lilla öglan hos limaçonen.

4a) Beräkna arean hos ytan som uppstår då kardioiden $r = a(1 + \cos\theta)$ roterar kring x-axeln.

b) Beräkna volymen hos kroppen innanför ytan. (Se anmärkningen vid onsdagens uppg. 4. Även här måste man först sätta upp integralen. Utnyttja också kontrollmöjligheten, som ges i anmärkningen.)

Demo: För punkten $P(x, y)$ låter vi d_1 beteckna avståndet från P till punkten $(-a, 0)$ och d_2 avståndet från P till punkten $(a, 0)$.



Vi studerar <u>lemniskatan</u> $C: d_1 \cdot d_2 = a^2$ och beräknar arean innanför C samt arean hos ytan som uppstår, då C roterar kring y-axeln.