Gk2 i Matematik, hemtal v14–15/07 Metsalo

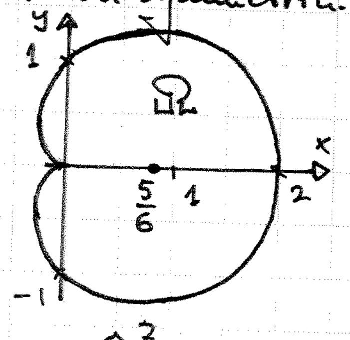
Kap. 8&9 i Kreyszig är rekommenderad bredvidläsning till kap. 11–16 i Adams, men förutsätter de verktyg som Adams ger.
Kap. 1, 2 & 4 i Kreyszig är rekommenderad bredvidläsning till appendix IV / kap. 17 (uppl. 5 / uppl. 4 & 6) i Adams, där ordinära differential-ekvationer behandlas.

On (före påsklovet):

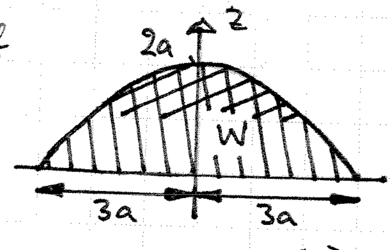
1) Vi studerar ytorna i ex. 5, kap. 14.4 (figuren har bara en fjärdedel av ytorna). Deras skärningskurva är Vivianis kurva, bekant sedan tidigare.
a) Beräkna arean hos den delen av den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$, som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$. Gott råd: använd rektangulära koord.
b) Beräkna arean hos den delen av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, som ligger innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$ (ytan kallas för Vivianis fönster). Gott råd: använd polära koord. och demo on v9.

2) Bestäm tyngdpunkten hos det plana området $\mathcal{D}$ med den variabla area-densiteten i uppg. 1, on v13. Obs. symmetrin.

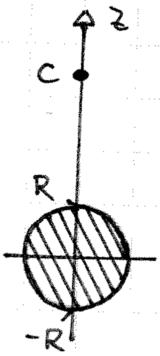
3) Det plana området Ω till höger är homogent (konstant area-dens.) och begränsas av kardioiden $r = 1+\cos\theta$. Visa att dess tyngdpunkt är $(5/6, 0)$. Gott råd: pol. koord.



4) Kroppen W begränsas av xy-planet och rotationsparaboloiden $z = 2a\cdot\left(1-\frac{x^2+y^2}{(3a)^2}\right)$.
I punkten $(x,y,z)\in W$ är dess densitet $\delta(x,y,z)=\delta_0\cdot z/2a$. Dess tyngdpunkt finns då av symmetriskäl på z-axeln. Visa att tyngdpunkten är $\bar{z}=a$.
Gott råd: använd cylindriska koord.

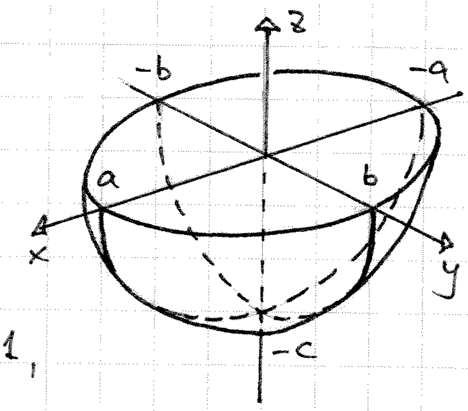


Demo: En punkt befinner sig på avståndet $c > R$ från mittpunkten hos ett klot med radien R. Vi visar att punktens genomsnittliga avstånd från klotet är $c + R^2/5c$ mha. sfäriska koord.

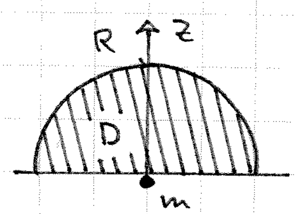


Fredagens hemtal (efter påsklovet) på baksidan.
De senaste 2 årens mellanförhör 3 på insidan.

Fr: 1) Halvellipsoiden $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ z \leq 0\}$ har $a \geq b > 0 < c$. Bestäm dess tyngdpunkt. Avgör också hur stor c maximalt får vara i förhållande till b för att halvellipsoiden skall stå på sin krökta yta. Se även uppg. 1, on v7.

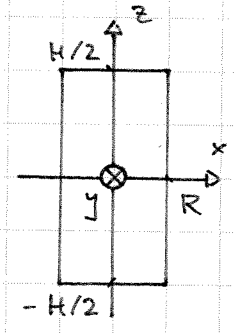


2a) Bestäm tyngdpunkten hos det homogena halvklotet D i figuren t.h. med densiteten δ_0 och radien R.



b) Beräkna gravitationskraften varmed halvklotet påverkar en punktmassa m i klotets mittpunkt (se fig.), analogt med demo fr v13.
Observera, att vi inte skulle få samma kraft, om vi skulle koncentrera hela halvklotets massa till dess tyngdpunkt.

3) Vi har en homogen rät cirkulär cylinder med höjden H, radien R och densiteten δ_0. Bestäm dess tröghetsmoment map.
a) symmetriaxeln (z-axeln i figuren)
b) en axel genom mittpunkten ⊥ symmetriaxeln (t.ex. x- eller y-axeln i fig.)



4) En partikel med massan m (kg), som rör sig med farten v (m/s), har som bekant kinetiska energin $E = mv^2/2$.
En partikel med massan m, som befinner sig på avståndet r (m) från en axel och roterar kring axeln med vinkelhastigheten ω (1/s), har farten $r\omega$ och följaktligen kinetiska energin $E = m(r\omega)^2/2$.
Visa utgående från detta att ett homogent klot med radien R (m) och densiteten δ (kg/m^3), som roterar med vinkelhastigheten ω kring en diameter har totala kinetiska energin $E = 4\pi\delta R^5\omega^2/15$.

Demo: Vi visar att om vi har ett rutat golv, där kvadraterna har sidan a och tappar tandpetare med längden a på golvet, så är sannolikheten att en tandpetare skär minst en skarv (horisontell eller vertikal) $P = 3/\pi$.