Gk 2 i Matematik, hemtal v12/07 Metsalo

Tisdagen 27.3. har vi <u>2:a mellanförhöret</u>, som omfattar kap. 12–13 i Adams med undantag för kap. 13.7 i uppl. 5 & 6 (som saknar motsvarighet i uppl. 4). Samma regler gäller som för 1:a mellanförhöret. Tänk på att det kan vara svårt att läsa på inför ett mellanförhör och fira årsfest samma helg. Men man kan läsa på långt före sista helgen också!
Torsdagen 22.3. har vi <u>2:a datorövningen</u>. Uppgifterna kommer att delas ut separat.
Efter kap. 13 fortsätter vi med kap. 14–16.
Nedan beskrivs <u>Newtons metod</u> för att finna gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta. Detta är en utvidgning av kap. 13.6 i Adams där man arbetar med 2 ekv. och 2 obek. Räkningarna utförs lämpligast med datorer.

<u>Newtons metod</u> för n ekvationer med n variabler:

Om $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är n st. funktioner av n variabler (som vi tänker oss bildar en n-kolumnvektor) och vi söker en lösning till

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}) = 0 \\ f_2(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

(ett ekvationssystem med n ekvationer och n obekanta)

kan iterationsschemat

$$\bar{x}_{m+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{m+1} = \bar{x}_m - \left(J(\bar{x}_m)\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix} =$$

Matris-invertering

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_m - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix}$$

med lämpligt begynnelsevärde $\bar{x}_0$ (en n-kolumnvektor) konvergera till ett gemensamt nollställe för de n st. funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Precis som i fallet med 1 ekvation med 1 variabel kan Newtons metod också divergera. Konvergens förutsätter bra begynnelsevärden, men om Newtons metod konvergerar, tenderar den att konvergera snabbt.

Ön: 1) $F(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$.

a) Var är $F = 0$? Bestäm F:s tecken, där $F \neq 0$.

b) Bestäm F:s kritiska punkter samt deras natur (lok. max, lok. min eller sadelpunkt) mha. 2:a-derivatstestet. Jämför resultatet med F:s tecken.

2a) Visa att fjärdegradspolynomet $p(x,y,z) =$
$= 1 - 2x + 4y - 14z + 2xy - 2xz - y^2 + 8yz - 9z^2 - y^4$ har exakt en kritisk punkt samt bestäm den.

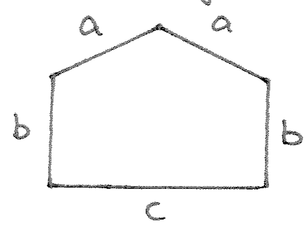
b) Använd 2:a-derivatstestet för att avgöra om den kritiska punkten är ett lok. max, lok. min eller en sadelpunkt.

3) En excentrisk miljonär låter bygga en elliptisk simbassäng, vars rand ges av $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$ och som i punkten (x,y) har djupet $f(x,y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + 2y^2)$ (enheten meter överallt). Bestäm de punkter, där djupet i bassängen är störst resp. minst samt djupet där.

4a) Maximera och minimera $f(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$.

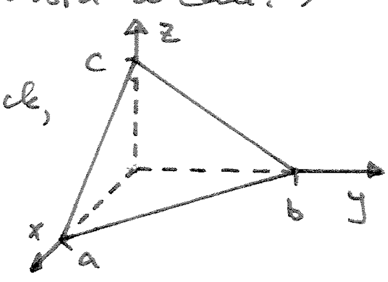
b) Maximera och minimera $f(x,y,z) = xyz$ under bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$ och $h(x,y,z) = x - y = 0$.

Demo: Svakar tänker installera ett vindsfönster. Fönstret skall ha formen av en likbent triangel ovanför en rektangel som i fig. Eftersom Svakar har en tätningslist av längd L, får fönstrets omkrets inte överskrida L. Vi bestämmer hur fönstret skall dimensioneras för att dess area skall maximeras.



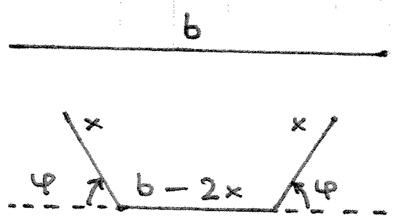
(Av alla rektanglar med en given omkrets har kvadraten den största arean och av alla trianglar med en given omkrets har den liksidiga triangeln största arean.)

Fr: 1a) Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms i tetraedern i fig. till höger så att tre av rätblockets sidor sammanfaller med koordinatplanen.

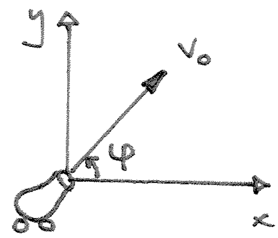


b) Ur ett klot med radien R sågas ett rätblock. Visa att av alla möjliga rätblock har kuben med klotets diameter som rymddiagonal största sammanlagda arean hos begränsningsytorna.

2) Långa plåtremsor av bredd b vikes till stuprännor genom att remsornas kanter med en bredd x vikes upp vinkeln φ symmetriskt som i figuren ovan. Vilka värden på x och φ maximerar stuprännornas tvärsnittsarea?



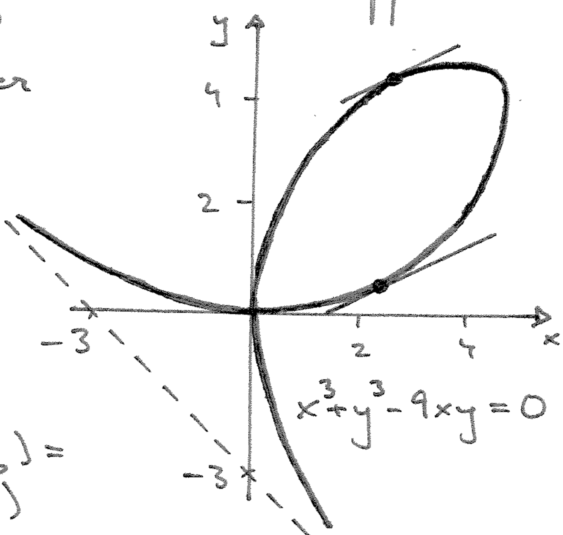
3) Vi skjuter en kanonkula med den fixa begynnelsefarten v_0 och vinkeln φ från horisontalplanet. Placera koordinaterna som i fig. t.h. och bortse från luftmotstånd, Coriolis-kraft o.d. Då utsätts kulan för accelerationen $\ddot{\bar{r}}(t) = -g\hat{j}$ för $t > 0\,s$ (om vi sätter $t = 0\,s$ i avfyringsögonblicket).



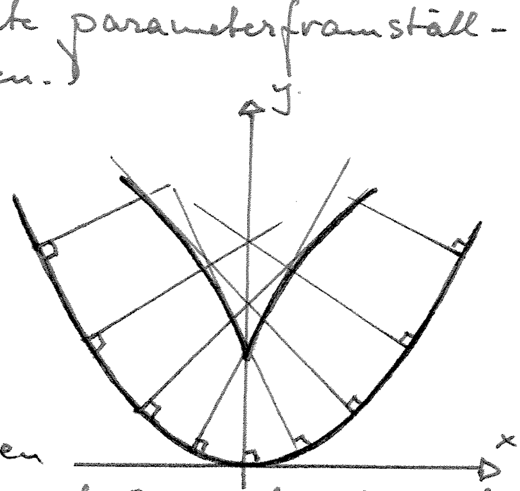
a) (gymnasiefysik): Härled kulans position $\bar{r}(t)$ för $t \geq 0\,s$. När är kulan som högst? Hur högt är den då? Hur långt från kanonen landar kulan? Vilket val av φ maximerar avståndet till nedslagsplatsen?

b) (högskolematematik): Olika φ ger olika trajektorier för kanonkulorna. Bestäm trajektorieskarans envelopp.

4) Kurvan $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy = 0$ kallas för Cartesii blad. Vi söker de punkter på kurvan, där lutningen är $= 1/2$.
Skriv om kravet $dy/dx = 1/2$ på formen $g(x,y) = 0$ och använd Newtons metod för 2 ekvationer med 2 obekanta med begynnelsevärdena $(x_0, y_0) = (2,4)$ resp. $(x_0, y_0) = (2,1)$ en iteration. (Använd alltså inte parameterframställningen från 1:a datorövningen.)



Demo: Vi visar att enveloppen av skaran av normallinjer till en plan kurva är kurvans evoluta. Jämför med demo on v7.



På baksidan finns sammanfattningen av Mathematica, som också delades ut i samband med 2:a datorövningen i höstas.

- *Mathematicas* hjälpsystem används på följande sätt: ?Det ger uppgifter om Det. ??Det ger en noggrannare beskrivning. *-tecknet fungerar som en joker. dvs. ?Int* räknar upp all funktioner som börjar med Int. ?*Int* osv.
- *Mathematicas* egna funktioner och befallingar börjar alltid med stor bokstav, och består i allmännhet av hela ord. dvs. Integrate. Det. Inverse. Om funktionens namn är ett sammansatt ord, så börjar bägge delarna med stor bokstav. t.ex. MatrixForm. NullSpace (obs! Eigensystem, är undantaget som bekräftar regeln). Funktionernas argument ges inom hårda parenteser [ ].
- *Mathematica* ger namn åt inmatade och utmatade data av typen In[luku]. Out[luku]. Dessa kan användas som referenser: dessutom kan man hänvisa till utmatad data med hjälp av %-tecknet. Således betyder %5 samma sak som Out[5] och ett enkelt % hänvisar till föregående utmatning.
- Om man skriver ett semikolon i slutet av en inmatning så skrivs inte resultatet ut: trots det kan man hänvisa till resultatet med ett %-tecken. Flera inmatningar kan ges på samma rad separerade av semikolon.
- *Mathematica* känner bl.a. följande konstanter: I (imaginärenheten), Pi (π) och E (e dvs. Nepers tal).
- Multiplikationstecknet kan ersättas med ett mellanslag: x*y eller x y; obs att om mellanslaget fattas så tolkas xy som en variable vars namn är xy. Exponenten tecken är ^, t.ex. 3^5 =3^5.
- *Mathematica* känner till bl.a. följande elementärfunktioner: Exp. Sqrt. Sin. Cos. Log, ArcTan osv. Kom ihåg stora begynnelsebokstäver! Numeriska värden får man med kommandot N. t.ex. N[Exp[Pl]]. N[Pi,30] ger π med 30 korrekta decimaler. Försök uttryck av typen Sin[Pl/2] och Exp[I Pi]. Vinklar ges således i radianer. Konstanten som förvandlar grader till radianer heter Degree = $\pi/180$: t.ex. Sin[45 Degree].

  Då man upphöjer ett komplext tal i en potens, och därefter tar motsvarande rot av talet, får man i allmännhet inte samma tal tillbaka som man startade med. försök t.ex. följande: (0.3+0.8 I)^5;%^(1/5). Det rör sig inte om ett programmeringsfel utan om att komplexa rötter inte är entydigt definjerade...försök också räkna (-1.0)^(1/3).

  Elementärfunktioner godtar således också komplexa argument. försök med Log[2.3+5.5 I], Sin[-9.3+6.6 I].