Gk2 i Matematik, hemtal v11/07 Metsalo

Om: 1) Låt $f(x,y) = 5e^{xy} - \sin(3x) - y^2$.

a) I vilken punkt skär tangentlinjen till kurvan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$ i punkten $(0,2)$ x-axeln?

b) I vilken punkt skär tangentplanet till ytan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ i punkten $(0,2,1)$ x-axeln?

2) Vi studerar ytan $xyz = 2$ i 1:a oktanten $x,y,z > 0$. Om vi tar en godtycklig punkt på ytan, så kommer ytans tangentplan i punkten att begränsa en tetraeder tillsammans med koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt bestäm denna volym. (En tetraeder med basarean A och höjden h har som bekant volymen $V = Ah/3$.)

3) Låt $T(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 3yz + \ln(x^2+y^2)$.

a) Bestäm T:s gradient ∇T.

b) Visa att $\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 \equiv 0$ (T harmonisk).

c) I vilken riktning ökar T fortast i punkten $(0,1,2)$ och hur fort ökar T i den riktningen i den punkten?

d) Hur fort ökar T i riktning mot origo i punkten $(0,1,2)$?

e) Bestäm Taylorpolynomet $P_2(x,y,z)$ av grad 2 av funktionen T, utvecklad i punkten $(a,b,c) = (0,1,2)$. Lämna P_2 med potenser av x $(=(x-0))$, $(y-1)$ och $(z-2)$ i stället för att skriva ut det i potenser av x, y och z.

4) Kallebacken ligger på en kulle, vars höjd ges av $z = f(x,y) = (160\,000 - x^2 - 2y^2)/1000$, där x-axeln pekar österut, y-axeln norrut och enheten är meter. Calvin befinner sig i $(300, -100, 50)$.

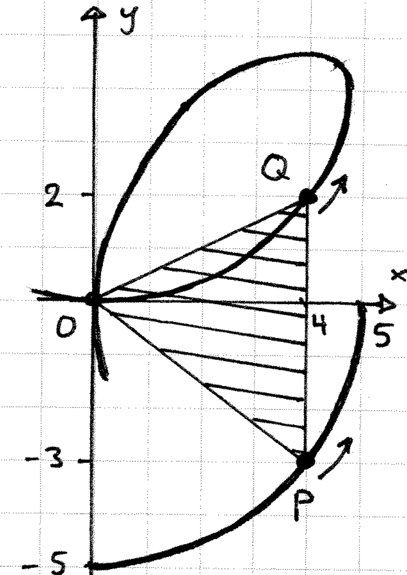
a) Hobbes avtågar åt nordost. Går han uppåt eller nedåt?

b) Calvin avtågar i riktningen som går brantast uppåt. I vilken riktning i xy-planet (på kartan) går han?

c) I vilken riktning i $\mathbb{R}^3$ går Calvin?

v.g. vänd.

Öv: Demo: 12 Ch 3 (Challenging Problems) Detta är den 3-dim. analogin till ex. 10 i kap. 12.5.



Fr: 1) Vi studerar en triangel OPQ, där O är fix i origo, P rör sig på cirkeln $x^2+y^2=25$ och Q rör sig på Cartesii blad $x^3+y^3-9xy=0$. I ett visst ögonblick är P i punkten $(4,-3)$ och rör sig längs cirkeln så dess vertikala hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet), medan Q är i punkten $(4,2)$ och rör sig längs Cartesii blad så dess horisontella hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet). Då är triangelns area 10 (areaenheter) i det aktuella ögonblicket.

a) Hur stor är punkten P:s horisontella hastighet (längdenheter per tidsenhet) i det akt. ögonblicket?

b) Hur stor är punkten Q:s vertikala hastighet (längdenheter per tidsenhet) i det akt. ögonblicket?

c) En triangel med hörnpunkterna $O(0,0)$, $P(a,b)$ och $Q(c,d)$ har som bekant arean $A=|ad-bc|/2$. Hur stor är triangelareans ändringshastighet (areaenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? Ökar eller minskar arean just då?

2) Visa att ekvationen $F(x,y,z)=z\cdot e^x+2\cos(yz)=0$ bestämmer funktionen $z=g(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten $(0,0,-2)$. Bestäm g:s Maclaurin-polynom av grad 2 (dvs. Taylor-polynomet utvecklat i origo).

3) Visa att ekvationerna $F_1(x,y,z)=xy+e^{y^2}+x^3z-3=0$ och $F_2(x,y,z)=\cos(y^2z)+\ln(y+xz)+x^2-5=0$ bestämmer funktionerna $x=g_1(y)$ och $z=g_2(y)$ implicit i en omgivning av punkten $(2,1,0)$. Bestäm 1:a gradens Taylor-polynom av funktionerna g_1 och g_2 utvecklade i punkten $y=1$. (På motsvarande sätt kan man även bestämma Taylor-polynom av högre grad av funktionerna g_1 och g_2 utvecklade i $y=1$.)

4) Antag att $F(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$, att $F(x_0,y_0,z_0)=0$ och att $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z \neq 0$ i punkten (x_0,y_0,z_0), så ekvationen $F(x,y,z)=0$ bestämmer funktionerna $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$ och $z=z(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten (x_0,y_0,z_0). Visa att i så fall är

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

(och bli eventuellt av med en fördom).

Demo: Halvklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 25^2$, $z \geq 0$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z)=9x+12y+20z+375$ (godtyckliga enheter). Vi bestämmer alla kritiska punkter för δ i kroppen, på de två begränsningsytorna samt på begränsningsytornas gemensamma begränsningskurva. Likaså avgör vi var δ är högst resp. lägst samt hur hög densiteten δ är där.

Nedan finns fjolårets mellanförhör nr. 2:

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr. 2, 27.3.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Visa att funktionen $f(x,y) = \ln(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$ satisfierar den partiella differentialekvationen $x^2(f_{xx}+f_{xy}) = x^2(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) = c$ för ett visst värde på konstanten c samt bestäm detta c-värde.

2. a) I vilken punkt skär normallinjen till ytan $x^2+y^3+z^5=4$ i punkten $(2,-1,1)$ xz-planet?
   b) I vilken punkt skär tangentplanet till ytan $x^2+y^3+z^5=4$ i punkten $(2,-1,1)$ y-axeln?

3. I en omgivning av punkten $(x,y,z)=(1,1,0)$ definierar ekvationen $\sin(x-y)+yz+e^z=1$ implicit en funktion $z=g(x,y)$ sådan att $g(1,1)=0$. (Detta är givet i uppgiften och behöver alltså inte visas.) Beräkna den partiella derivatan $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1) = g_{yx}(1,1)$.

4. Temperaturen i punkten (x,y,z) på enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$ ges av $T(x,y,z)=xy+yz$ (godtyckliga enheter). I vilken punkt / vilka punkter är temperaturen högst och hur hög är den där?