Gk2 i Matematik, hemtal v9/07 Metsalo

Ov: 1a) 12.3.4 b) 12.3.11 c) 12.3.22 d) 12.3.23

2) 12.3.36 (Jämför med funktioner av en variabel!)

3) Visa att den givna funktionen satisfierar den givna partiella differentialekvationen:

a) $f(x,y)=\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$; $\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2\equiv 0$.

b) $f(x,t)=A\cos(\kappa x)e^{-\kappa^2 t}+B\sin(\kappa x)e^{-\kappa^2 t}$; $\partial^2 f/\partial x^2=\partial f/\partial t$ (A, B, κ konstanter);

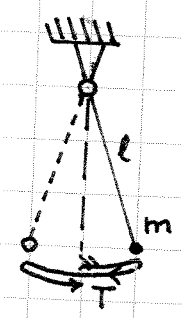
c) $f(x,t)=A\sin(x-ct)+B\cos(x-ct)$; $\partial^2 f/\partial t^2=c^2\cdot\partial^2 f/\partial x^2$.

d) $f(r,\theta)=r^n\cdot(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$, $r\neq 0$; $r^2\,\partial^2 f/\partial r^2+r\cdot\partial f/\partial r+\partial^2 f/\partial\theta^2\equiv 0$ ($n\in\mathbb{Z}$, A, B konstanter)

4) En simbassäng har längden 50m, men bredden kan varieras genom att flytta en mellanvägg. En dag breddades bassängen genom att mellanväggen flyttades med farten 0.1 m/min, samtidigt som vatten pumpades in 3 m³/min. I det ögonblicket då bredden var 8m, var djupet 1m. Med vilken fart ändrades djupet i det ögonblicket? Ökade eller minskade vattendjupet just då?

Demo: Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp t.o.m. 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför pol. koord. r och θ via $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Då är $f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(r,\theta)$. Vi visar m.h.a. kedjeregeln att $(\partial f/\partial x)^2+(\partial f/\partial y)^2=(\partial F/\partial r)^2+(\frac{1}{r}\cdot\partial F/\partial\theta)^2$.

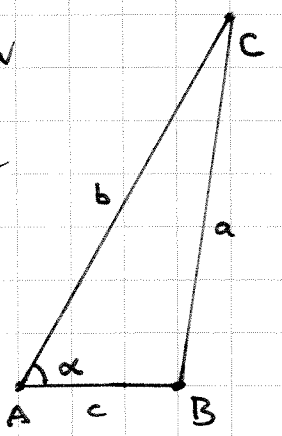
Fr: 1) Svängningstiden T för <u>små</u> svängningar hos en matematisk pendel ges av $T=2\pi\cdot\sqrt{l/g}$, där l är den styva, viktlösa trådens längd och g är tyngdkraftsaccelerationen. Märk att svängningstiden inte beror på massan m.



Svalbas bygger en pendel för att approximera g. Han uppmäter l till 1.00 ± 0.03 m och T till 2.00 ± 0.05 s. Detta ger honom att $g\approx\pi^2\,m/s^2$ ($\approx 9.87\,m/s^2$). Använd differentialen till att beräkna en approx. övre gräns för osäkerheten i approximationen $g\approx\pi^2\,m/s^2$, som osäkerheterna i l och T ger upphov till. (Jämför även med isokrona pendeln i uppg. 3, fr v7.)

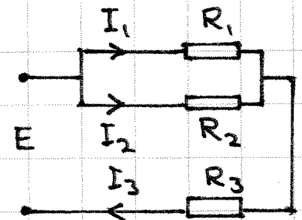
v. g. vänd

2) Cosinus-satsen säger att om b och c är två av sidorna hos en plan triangel och α är den mellanliggande vinkeln, så gäller för den tredje sidan a att $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, dvs. att $a(b, c, \alpha) = (b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha)^{1/2}$.



Avståndet a mellan punkterna B och C mättes mha. en tredje punkt A. Mätningarna gav $b = 800 \pm 10$ m, $c = 300 \pm 3$ m, $\alpha = 60 \pm 1°$ $\Rightarrow a \approx 700$ m. Använd differentialen till att beräkna en approx. övre gräns för osäkerheten i approximationen $a \approx 700$ m, som osäkerheterna i b, c och α ger upphov till.

3) I kretsen till höger har tre resistorer med resistanserna R_1, R_2 och R_3 kopplats till en spänningskälla med spänningen E. Strömmen I_1 genom resistorn R_1 ges då som bekant (?) av $I_1 = ER_2/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)$. Om $E = 40$ V, $R_1 = 1.00 \pm 0.04$ kΩ, $R_2 = 2.00 \pm 0.01$ kΩ och $R_3 = 6.00 \pm 0.05$ kΩ, så är $I_1 \approx 4$ V/kΩ = 4 mA.



a) Använd differentialen till att beräkna en approx. övre gräns för osäkerheten i approximationen $I_1 \approx 4$ mA.

b) Om vi vill minska osäkerheten i I_1 genom att byta ut en av resistorerna mot en annan med samma nominella resistans men med bara hälften så stor osäkerhet, vilken resistor bör vi byta ut då?

4a) Bestäm en normalvektor till ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 55$ i punkten $P(5, 3, 2)$.

b) Bestäm en normalvektor till konen $x^2 = y^2 + 4z^2$ i P.

c) Bestäm en tangentvektor till skärningskurvan mellan ellipsoiden och konen i punkten P.

Demo: $f(x, y, z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$. Vi inför <u>sfäriska koordinater</u> ρ, φ och θ via $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$ (se även kap. 14.6). Då är $f(x, y, z) = f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi) = F(\rho, \varphi, \theta)$. Vi uttrycker $\partial F/\partial\rho$, $\partial F/\partial\varphi$ och $\partial F/\partial\theta$ mha. f:s partiella derivator $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ och $\partial f/\partial z$.