Gk2 i Matematik, datorövn. 2, 9.11.2006 Metsala

0) Läs igenom uppg. 0 från datorövn. 1 och handla därefter!

Under denna datorövn. använder vi programpaketet Mathematica. Mathematica kan i motsats till Matlab arbeta symboliskt och inte bara numeriskt. Logga in direkt i arbetsstationen vid vilken ni sitter. Därefter anropar ni programpaketet Mathematica genom att skriva use mathematica ↵. Sedan startar ni Mathematica genom att skriva mathematica ↵. Mathematica ritar då upp ett nytt fönster, dit ni skriver kommandona. Ett kommando avslutas med Shift Enter (i Matlab var det bara Enter ↵). Pilknapparna fungerar också annorlunda än i Matlab: man rör sig upp och ned i fönstret.

På insidan finns en liten sammanfattning av Mathematica. Märk speciellt att för att få information om något kommando Namn skriver man ?Namn (i Matlab skrev man help namn). För att få ^ (upphöjt till) och ` verkar det som om arbetsstationerna kräver dubbelklickning.

1a) Mathematica kan beräkna somliga gränsvärden. Pröva t.ex. 1.2.12, 1.2.25 och 1.3.6 från fr v42. Limit, Sqrt, Sin, Cos och Infinity kan vara till nytta. Studera dem via ?Limit,...

b) Tänk efter hur $\exp(1/x) = e^{1/x}$ uppför sig nära $x = 0$. Beräkna $\lim_{x\to 0^-} \exp(1/x)$ och $\lim_{x\to 0^+} \exp(1/x)$. Direction och Exp kan vara till nytta.

2a) Mathematica kan rita funktioners grafer. Pröva t.ex. $f_1(x) = \sin(1/x)$. Använd Plot. PlotRange och AspectRatio kan användas för att påverka figurens utseende. Märk hur Mathematica "fuskar" då den ritar grafen nära $x = 0$.

b) Dito för $f_2(x) = x + 2x^2 \cdot \sin(1/x)$ från datorövn. 1 och on v43 och $f_3(x) = \exp(1/x)$ från uppg. 1b) ovan.

c) Dito för $f(x) = 2x/(1+x^2)$ och $g(x) = \arcsin(f(x))$. Märk att g inte är differentierbar överallt. x^2 kräver förmodligen en dubbelklickning. ArcSin ger arcsin.

v.g. vänd

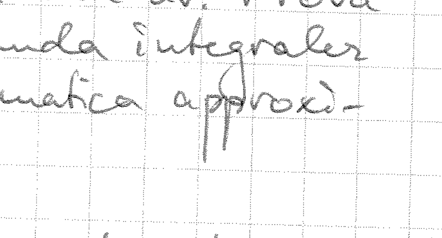
3) Mathematica kan derivera symboliskt mha. D. Pröva t.ex. $\frac{d}{dx}(f(x))$ och $\frac{d}{dx}(g(x))$ från uppg. 2c) ovan. Plotta också derivatornas grafer. Märk hur Mathematica "fuskar" då den ritar grafen av en diskontinuerlig funktion: precis som Matlab beräknar Mathematica funktionsvärdet i ett antal punkter (tätare, om funktionen varierar mycket och glesare, om funktionen tycks uppföra sig "snällt") och sammanbinder punkterna med räta linjer.

4) Mathematica kan också rita kurvor på parameterform. Asteroiden $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ från datorövn. 1 och fr v44 kan ges på parameterform: $(x,y)=(a\cdot\cos^3 t, a\cdot\sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$. Välj $a=1$ och rita asteroiden. Rita gärna också enhetscirkeln i samma figur. ParametricPlot gör jobbet. Två olika figurer kan sammanföras med Show, speciellt om de namngetts. AspectRatio påverkar figurens utseende.

5) Mathematica kan finna somliga obestämda integraler, även kallade anti-derivator eller primitiva funktioner. Beräkna $\int (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\,dx$. Använd Integrate. Beräkna arean hos asteroiden i uppg. 4 ovan och kontrollera svarets rimlighet mha. figuren.

6) Andra integraler klarar Mathematica inte av. Pröva t.ex. $\int \sin(\sqrt{1+x^6})\,dx$. Men bestämda integraler som $\int_0^1 \sin(\sqrt{1+x^6})\,dx$ kan Mathematica approximera mha. NIntegrate. Pröva!

7) Ladda programpaketet ImplicitPlot mha. kommandot << Graphics`ImplicitPlot` (där ` förmodligen kräver dubbelklickning, precis som ^). Använd ImplicitPlot till att rita lemniskatan $d_1\cdot d_2=25$ och kurvan $d_1\cdot d_2=30$ från datorövn. 1 och fr v44. (d_1 står för avståndet från P(x,y) till (-5,0) och d_2 för avståndet från P(x,y) till (5,0). Punkten (6,2) finns på lemniskatan $d_1\cdot d_2=25$.) Märk att ekvationer ges med två likhetstecken i Mathematica.



Mathematica är ett kraftfullt verktyg för att bl.a. kontrollera svaren till olika hemtal. Men glöm inte, att vi är ute efter lösningarna, inte bara efter svaren.
Lämna Mathematica mha. Exit och stäng fönstret genom att välja Quit under File. Glöm inte att logga ut.

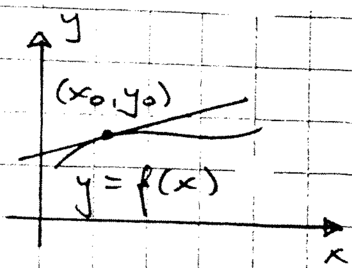
På baksidan ges en kort sammanfattning av vad den sista delen av kursen kommer att handla om.

- *Mathematicas* hjälpsystem används på följande sätt: ?Det ger uppgifter om Det, ??Det ger en noggrannare beskrivning. *-tecknet fungerar som en joker, dvs. ?Int* räknar upp all funktioner som börjar med Int, ?*Int* osv.
- *Mathematicas* egna funktioner och befallingar börjar alltid med stor bokstav, och består i allmännhet av hela ord, dvs. Integrate, Det, Inverse. Om funktionens namn är ett sammansatt ord, så börjar bägge delarna med stor bokstav, t.ex. MatrixForm, NullSpace (obs! Eigensystem, är undantaget som bekräftar regeln). Funktionernas argument ges inom hårda parenteser [ ].
- *Mathematica* ger namn åt inmatade och utmatade data av typen In[luku], Out[luku]. Dessa kan användas som refernser; dessutom kan man hänvisa till utmatad data med hjälp av %-tecknet. Således betyder %5 samma sak som Out[5] och ett enkelt % hänvisar till föregående utmatning.
- Om man skriver ett semikolon i slutet av en inmatning så skrivs inte resultatet ut; trots det kan man hänvisa till resultatet med ett %-tecken. Flera inmatningar kan ges på samma rad separerade av semikolon.
- *Mathematica* känner bl.a. följande konstanter: I (imaginärenheten), Pi (π) och E (e dvs. Nepers tal).
- Multiplikationstecknet kan ersättas med ett mellanslag: x*y eller x y; obs att om mellanslaget fattas så tolkas xy som en variable vars namn är xy. Exponenten tecken är ^, t.ex. 3^5 =3^5.
- *Mathematica* känner till bl.a. följande elementärfunktioner: Exp, Sqrt, Sin, Cos, Log, ArcTan osv. Kom ihåg stora begynnelsebokstäver! Numeriska värden får man med kommandot N, t.ex. N[Exp[PI]]. N[Pi,30] ger π med 30 korrekta decimaler. Försök uttryck av typen Sin[PI/2] och Exp[I PI]. Vinklar ges således i radianer. Konstanten som förvandlar grader till radianer heter Degree = $\pi/180$: t.ex. Sin[45 Degree].

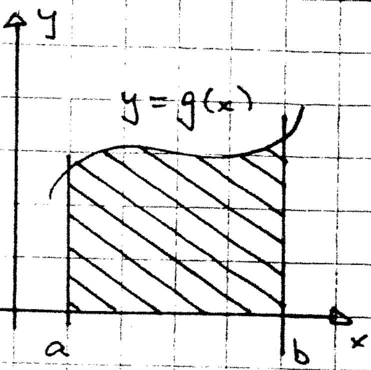
Då man upphöjer ett komplext tal i en potens, och därefter tar motsvarande rot av talet, får man i allmännhet inte samma tal tillbaka som man startade med, försök t.ex. följande: (0.3+0.8 I)^5;%^(1/5). Det rör sig inte om ett programmeringsfel utan om att komplexa rötter inte är entydigt definjerade...försök också räkna (-1.0)^(1/3).
Elementärfunktioner godtar således också komplexa argument, försök med Log[2.3+5.5 I], Sin[-9.3+6.6 I].

Nedan följer en liten sammanfattning av innehållet i den sista delen av Grundkurs I:

I kap. 2 studerade vi ett klassiskt problem, nämligen att bestämma tangentlinjen till en kurva $y = f(x)$ i en punkt $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$. För detta infördes begreppet derivata.



I kap. 5 studerar vi ett till synes helt obesläktat problem, nämligen att bestämma arean hos ett plant område som i figuren till höger. För detta inför vi begreppet Riemann-summa och får att problemet är nära besläktat med derivering: vi behöver anti-derivatan till g för att kunna beräkna arean.



I kap. 6 får vi en del metoder med vilkas hjälp vi kan bestämma anti-derivatan till somliga funktioner. Vi utvidgar det i kap. 5 införda integralbegreppet (generaliserade integraler, kap. 6.5) och studerar en del numeriska metoder att approximera värdet av en bestämd integral, då vi inte kan finna integrandens anti-derivata.

I kap. 7 får vi en del andra tillämpningar av den bestämda integralen vid sidan av beräkning av arean hos plana områden. Det är dessa tillämpningar, som motiverar införandet av Riemann-summor.