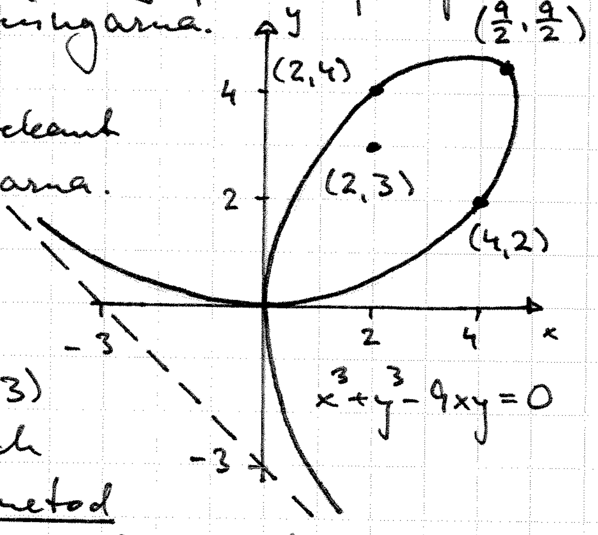
Gk2 i Matematik, datorövning 3, 26.4.2007 Metsalo

Uppgifterna kräver en hel del förberedelser hemma!
Vi börjar med programpaketet Matlab och fortsätter sedan med Mathematica. Tag därför med bägge kompendierna. Logga in direkt i arbetsstationen, vid vilken ni sitter. Därefter anropar ni Matlab genom att skriva use matlab ↵. Sedan startar ni Matlab genom att skriva matlab ↵. Matlab ritar upp nya fönster och svarar med >> när den är beredd att taga emot kommandon. Skriv format long för att få fler decimaler i de kommande räkningarna.



1) Cartesii blad $x^3+y^3-9xy=0$ är bekant från bl.a. de tidigare datorövningarna. Om vi studerar själva öglan hos Cartesii blad, så är origo längst bort från punkten (2,3). Men på öglan antar avståndet till (2,3) också ett lok.max. och ett lok. och ett glob.min. Använd Newtons metod (se hemtalslappen v12) för att approximativt bestämma dessa tre punkter. Efteråt kan man kontrollera svaren m.h.a. parameterframställningen från datorövning 1.
Varning: ^ (upphöjt till) tycks inte fungera i Matlab.
Men power(2,3) och 2*2*2 ger t.ex. också 2^3.
Gott råd: avståndet till punkten (2,3) maximeras/minimeras, då avståndets kvadrat maximeras/minimeras.
Arbeta förslagsvis med en 3-kolumnvektor x, vars komponenter är punktens x-koordinat, punktens y-koordinat samt Lagrange-multiplikatorn λ. Elementen i vektorn x anropas som x(1), x(2) resp. x(3). Lämpliga begynnelsevärden för x och y (dvs. x(1) och x(2)) fås ur figuren ovan, lämpliga begynnelsevärden för λ (dvs. x(3)) kan fås ur endera av de två ekvationerna

$\partial L/\partial x = 0$ (dvs. $\partial f/\partial x + \lambda\cdot\partial g/\partial x = 0$) och
$\partial L/\partial y = 0$ (dvs. $\partial f/\partial y + \lambda\cdot\partial g/\partial y = 0$).

Alternativt kan man dra till med något λ-värde och hoppas på att iterationen ändå konvergerar (går det, så går det!)

v.g. vänd

2) Matlab kan rita grafer av och nivåkurvor för funktioner av två variabler. Studera ex. 4 på sid. 52-53 i Matlab-opan och rita ytan $z = F(x,y) = (x^2-1)^2-(y^2-1)^2$ från on v12 och 2:a datorövningen. Rita även F:s nivåkurvor.
Goda råd: semikolon ; efter ett kommando gör att Matlab inte skriver ut svaret. Vidare arbetar Matlab med matriser, så om man vill att en operation (t.ex. multiplikation) skall utföras komponentvis, måste man sätta en punkt . framför operationen.

Lämna Matlab med kommandot quit och starta Mathematica. Mathematica kan bl.a. derivera och integrera symboliskt och göra annat, som Matlab inte klarar av, eftersom Matlab arbetar med siffror.

3) Använd NIntegrate till att approximera längden och tyngdpunkten hos Vivianis kurva från fr v6 och 1:a datorövningen (sätt $a = 1$). Av symmetriskäl finns tyngdpunkten naturligtvis på y-axeln.

4) Mathematica kan även beräkna multipla integraler. Använd Integrate till att beräkna volymen hos miljonärens bassäng från on v12.

5) Mathematica kan skissa ytor på parameterform mha. ParametricPlot3D (jmf. med 1:a datorövningen).
a) Skissa Möbius-bandet $\bar{F}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = ((1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\cos v,\ (1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\sin v,\ u\cdot\sin\frac{v}{2})$ för $u \in [-1/4, 1/4]$, $v \in [-\pi, \pi]$.
b) Skissa ytan $\bar{F}(u,v) = (\tan v - u\cdot\sin v,\ -u,\ 1-u\cdot\cos v)$ för $u \in [-2,4]$, $v \in [-1.4, 1.4]$. Sätt PlotRange -> All inuti ParametricPlot3D-kommandot, så inte Mathematica kapar av en del av ytan.
c) Approximera arean hos ytan i b)-delen mha. NIntegrate.

Därefter går vi över till skalär- och vektorfälten i kap. 15 och nabla-räkning med grad, div och rot i kap. 16 i Adams.

6a) Skissa åter grafen av $F(x,y)=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$, denna gång mha. Plot3D (dubbelklicka för att få ~). Skissa F:s nivåkurvor mha. ContourPlot. $|x|,|y|\leq 2$ är ett lämpligt område. PlotPoints -> 30, Contours -> 16 inuti ContourPlot – kommandot ger en bättre figur.

b) Ladda programpaketet PlotField mha. kommandot << Graphics`PlotField` (dubbelklicka för att få `). Skissa vektorfältet $\bar{u}(x,y)=\text{grad}(F)=\nabla F = \partial F/\partial x\, \hat{i} + \partial F/\partial y\, \hat{j} = P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ mha. PlotVectorField. Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan F och ∇F: ∇F pekar åt det håll, varåt F ökar snabbast och dess längd ger F:s ökningshastighet i den riktningen.

c) Skissa skalärfältet $g(x,y)=\text{div}(\bar{u})=\nabla\cdot\bar{u}=\partial P/\partial x+\partial Q/\partial y$, där $\bar{u}$ är vektorfältet från b)-delen mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan $\bar{u}$ och $\nabla\cdot\bar{u}$: $\nabla\cdot\bar{u}$ är positivt, där $\bar{u}$ lokalt sprider sig och negativt, där $\bar{u}$ lokalt drar sig samman.

7) Skissa vektorfältet $\bar{v}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}=$
$=\left(-2xy/\sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\right)\hat{i}+\left((x^2-y^2-1)/\sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\right)\hat{j}$.
Vi kan tänka oss $\bar{v}$ som ett plant vektorfält i $\mathbb{R}^3$: $\bar{v}(x,y,z)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}+0\hat{k}$. Då kan vi beräkna vektorfältet $\bar{w}(x,y,z)=\nabla\times\bar{v}=\{\text{räkn.}\}=0\hat{i}+0\hat{j}+(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)\hat{k}=h(x,y)\hat{k}$. Skissa skalärfältet $h(x,y)$, som alltså är vektorfältets $\nabla\times\bar{v}$ $\hat{k}$-komponent (enda komponenten, eftersom $\bar{v}$ är ett plant vektorfält parallellt med xy-planet) mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna för h och vektorfältet $\bar{v}$ mha. Show (gör åter PlotPoints -> 30, Contours -> 16) och studera sambandet mellan $\bar{v}$ och $\nabla\times\bar{v}$.

Mathematica kan lösa en del diff.ekvationer analytiskt mha. DSolve och andra numeriskt mha. NDSolve. Friska upp minnet om de analytiska metoderna från Gk1 (kap. 7.9 och 3.7). En del numeriska metoder för lösning av diff.ekvationer beskrivs i appendix IV i 5:e uppl. resp. kap. 17 i 4:e och 6:e uppl. i Adams samt i kap. 19.1–2 / kap. 21.1–2 i Kreyszig.

v.g. vänd

8a) Lös den separabla diff.ekvationen $y' = 2x^2y^2$ mha.
DSolve[y'[x] == 2*x^2*(y[x])^2, y[x], x].

b) Bestäm allmänna lösningen till den linjära 1:a ordningens diff.ekvationen $y' = y + \cos x - \sin x$ samt lösningen, som satisfierar begynnelsevillkoret (BV) $y(0) = 0$. Jämför lösningarna med lite olika BV $y(0)$. Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, xmin, xmax}] med lämpliga värden på xmin och xmax insatta direkt efter DSolve-kommandot ritar lösningskurvan.

9) Approximera några lösningskurvor till $y' = x^2 + y^2 - 1$ mha. NDSolve. Använd t.ex. BV $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ och $y(-1) = 0$ och rita lösningskurvorna som i uppg. 8b) ovan.

Lämna Mathematica mha. Exit, stäng Mathematica-fönstret och anropa Mozilla genom att skriva mozilla

10) Skriv adressen http://matta.hut.fi/matta2/ och välj DEW1 från Materiaalit. DEW1 är ett paket för numerisk lösning av 1:a ordningens diff.ekvationer. Skriv in diff.ekvationen i motsvarande ruta (välj t.ex. de två diff.ekvationerna från uppg. 8 eller den från uppg. 9 ovan). Observera att in heter den oberoende variabeln t, inte x.
DEW1 ritar ett fält av <u>tangentlinjesegment</u> till lösningskurvorna och om ni väljer en punkt genom att klicka med musen eller genom att mata in punktens koordinater manuellt, ritar datorn en approximation av lösningskurvan genom den punkten.

Lämna Mozilla och glöm inte att logga ut.