Gk2 i Matematik, hemtal v8/06 Metsalo

På insidan av detta blad finns de senaste två årens mellanförhör 2. Onsdagens räkneövning används åt att gå igenom nedanstående två demon för att illustrera vad partiella derivator används till. Fredagens hemtal finns på baksidan

Demo 1) En ekvation, där partiella derivator av en sökt funktion av flera variabler ingår, kallas för en partiell differentialekvation (PDE). Låt $T(x,t)$ ange temperaturen i en stång vid positionen x vid tiden t. Då gäller att $\partial T/\partial t = \delta \cdot \partial^2 T/\partial x^2$, där δ är en materialkonstant. Ekvationen kallas för (den 1-dim.) värmeekvationen. Vi motiverar ekvationen samt visar, att $T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-x^2/4\delta t}$ satisfierar den.

Demo 2) Om en sträng är fastspänd mellan punkterna $x=0$ och $x = L > 0$ på x-axeln och $y(x,t)$ anger strängens utslag från viloläget (dvs. x-axeln) vid positionen x vid tiden t, så gäller att $\partial^2 y/\partial t^2 = c^2 \cdot \partial^2 y/\partial x^2$, där c är en konstant. Ekvationen kallas för (den 1-dim.) vågekvationen. Vidare gäller att $y(0,t) = 0 = y(L,t)$ för alla t (randvillkor; RV). Om strängen utdrages från viloläget och släppes från vila (utan begynnelsehastighet) vid tiden $t=0$, har vi även begynnelsevillkoret (BV) $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ för $x \in [0,L]$.
Vi motiverar ekvationen samt visar, att $y_n(x,t) = \sin(\frac{\pi n x}{L}) \cdot \cos(c \cdot \frac{\pi n t}{L})$ satisfierar vågekvationen, randvillkoren och begynnelsevillkoret för $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($n=1$ ger oss grundtonen, $n>1$ ger oss övertoner).
Vi visar också, att $y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot \cos(c \cdot \frac{n\pi t}{L})$ också sat. vågekv. och villkoren för varje val av konstanterna a_n och varje ändligt N. Genom lämpliga val av a_n kan vi då också försöka sat. begynnelsevillkor av typ $y(x,0) = f(x)$, $x \in [0,L]$.

Fr: 1a) Bestäm definitionsmängden och värdemängden hos funktionen $f(x,y) = (1-xy)^2 + y^2$.

b) Dito för funktionen $g(x,y) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 36}$.

2) Undersök, om uttrycket har gränsvärde i origo (i $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$). Om så är fallet, bestäm gränsvärdet:

a) $\dfrac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$ b) $\dfrac{(\sin x + \sin y)^2}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ d) $\dfrac{x^2 y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$

3a) 12.3.4 b) 12.3.11

4a) 12.3.22 b) 12.3.23

Demo: Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp t.o.m. 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför pol.koord. r och θ via $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Då är $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r,\theta)$. Vi visar mha kedjeregeln att $(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 = (\partial F/\partial r)^2 + (\frac{1}{r}\cdot \partial F/\partial \theta)^2$.

De senaste två årens mellanförhör 2 nedan ↓

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

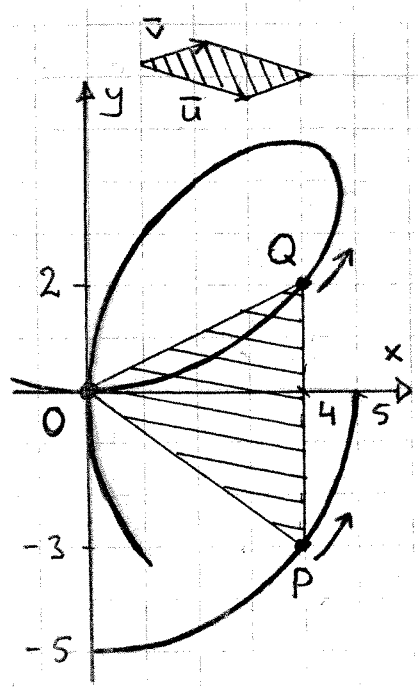
Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

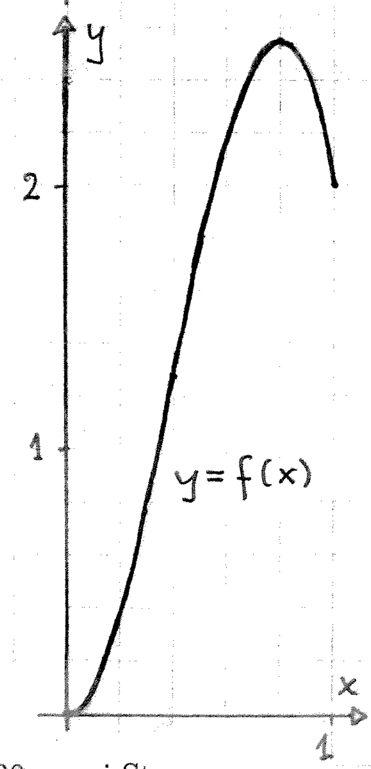
Mellanförhör nr. 2, 21.3.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. En parallellogram, som spänns av två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$, har som bekant arean $|\vec{u} \times \vec{v}|$, så en triangel med hörnpunkterna $O(0,0)$, $P(a,b)$ och $Q(c,d)$ har arean $A = |ad - bc|/2$. Vi studerar en triangel OPQ, där O är fix i origo, P rör sig på cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ och Q rör sig på Cartesii blad $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. I ett visst ögonblick är P i punkten $(4, -3)$ och rör sig längs cirkeln så att dess vertikala hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet), medan Q är i punkten $(4, 2)$ och rör sig längs Cartesii blad så att dess horisontella hastighet är 4 (längdenheter per tidsenhet). I så fall är triangelns area 10 (areaenheter) i det aktuella ögonblicket.
   a) Hur stor är punkten P:s horisontella hastighet (längdenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? (1p.)
   b) Hur stor är punkten Q:s vertikala hastighet (längdenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? (2p.)
   c) Hur stor är triangelareans ändringshastighet (areaenheter per tidsenhet) i det aktuella ögonblicket? Ökar eller minskar arean just då? (3p.)



2. Låt $f(x, y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbf{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp tom. 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför polära koordinater r och θ via $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Då är $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r, \theta)$. Visa med hjälp av kedjeregeln att
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2$$

3. I vilken punkt skär tangentlinjen till skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2z^2 = 144$ och den hyperboliska cylindern $2y^2 - z^2 = 36$ i punkten $(6, 6, 6)$ xy-planet?

4. Vi försöker approximera funktionen $f(x) = 12x^2 - 10x^3$ i intervallet $[0, 1]$ med ett 1:agradspolynom $g(x) = ax + b$ så att $J(a, b) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$ minimeras. Bestäm de värdena på a och b som minimerar $J(a, b)$.

I morgon är det tisdag. Då kan detta mellanförhör diskuteras kl. 13:00-13:30 nere i Stavans.

Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu Institutionen för matematik
Tekniska högskolan Institute of mathematics
Helsinki University of Technology

Metsalo

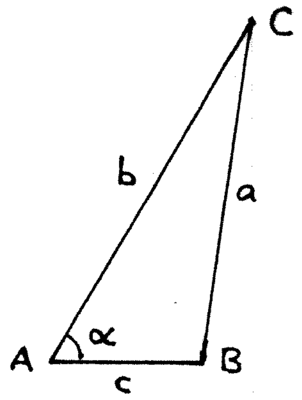
Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 2 22.3.2004

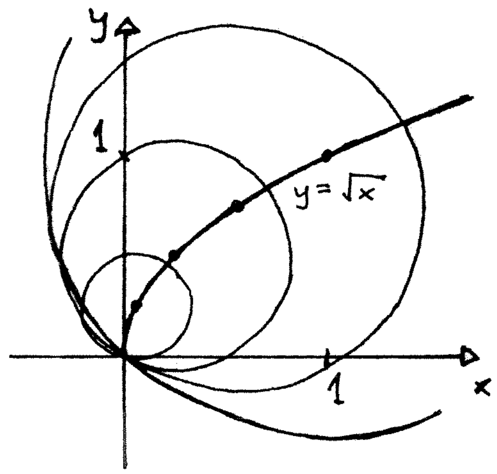
Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD. Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD. Please fill in clearly *on every sheet* the data on you and the examination. On *Examination code* mark course code, title and text mid-term or final examination. Study programmes are ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
På förekommen anledning varnas för oavsiktliga tryckfel i texten.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

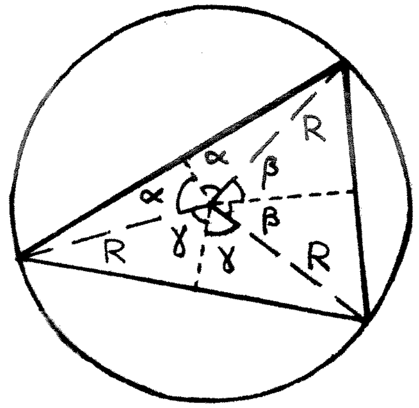
1. Ytorna $F(x,y,z) = y^2 + \ln(xz - y) - x^2 z - 1 = 0$ och $G(x,y,z) = \sin(x+y-z) + ze^{y-2x} - 3 = 0$ går bägge genom punkten $P_0 = (1,2,3)$.
   I vilken punkt skär tangentlinjen till ytornas skärningskurva i punkten P_0 xy-planet?



2. Cosinus-satsen säger att om b och c är två av sidorna hos en plan triangel och α är den mellanliggande vinkeln, så gäller för den tredje sidan a att $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, dvs. att $a(b,c,\alpha) = (b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)^{1/2}$.
   Avståndet a mellan två punkter B och C bestämdes med hjälp av en tredje punkt A. Mätningarna gav att $b = 800 \pm 10m$, $c = 300 \pm 3m$ och $\alpha = 60 \pm 1°$.
   Cosinus-satsen ger då att $a \approx 700m$.
   Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $a \approx 700m$.



3. Vi studerar skaran av cirklar, som har mittpunkten på kurvan $y = \sqrt{x}$ och som går genom origo. Cirkelskarans ekvation är $(x-c)^2 + (y-\sqrt{c})^2 = c^2 + (\sqrt{c})^2$, vilket också kan skrivas som $f(x,y,c) = x^2 - 2xc + y^2 - 2y\sqrt{c} = 0$.
   Bestäm ekvationen $y = g(x)$ för cirkelskarans envelopp.



4. Visa att av alla trianglar inskrivna i en cirkel med radien R har den liksidiga triangeln den största omkretsen.
   (Dess omkrets är naturligtvis $3\sqrt{3}R$.)