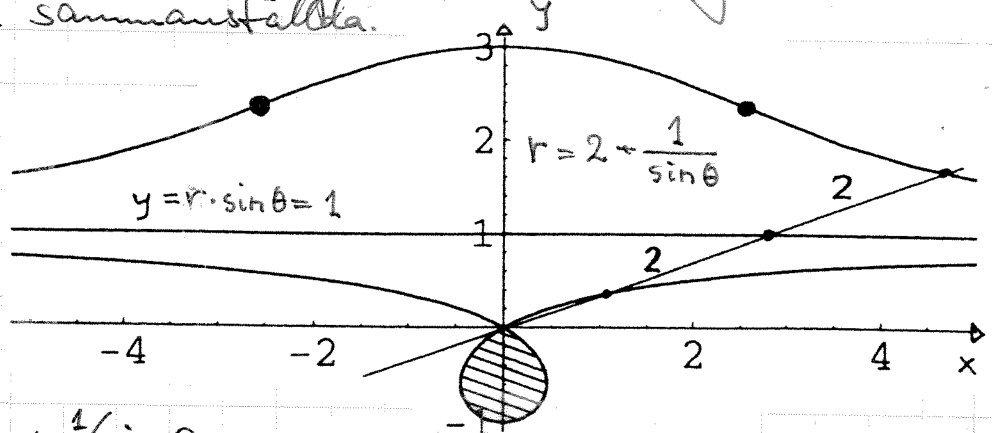
Gk 2 i Matematik, hemtal v4/06 Metsalo

Sluttentamen 19.5. är en <u>Turbotentamen</u>, då det är möjligt att ta om en deltentamen. Då ges bara 3 uppgifter á 6 poäng, men hemtals- och datorövningspoängen räknas ännu tillgodo.
På insidan av kursinformationsbladet finns <u>Svalears sillfrukost</u> med kompletterande material på baksidan. Det ges flera exempel på <u>serier</u>, som studeras i kap. 9. Var dock försiktiga med empiriska försök: divergens kan vara fatal!
Det mesta i kap. 10.1-4 och 10.6 torde vara bekant från skolan resp. Gk1. <u>Kontrollera detta</u> och friska upp minnet mha. uppg. i avsnitten.
I montrarna utanför matematik-biblioteket finns konen, den enmantlade hyperboloiden och den hyperboliska paraboloiden, som är 2:a-gradsytor, som ges via linjeskaror (exponaten 42 och 32; exponat 70 ges också av en linjeskara, men den är ingen 2:a-gradsyta). På insidan av detta blad finns de 9 icke-degenererade 2:a-gradsytorna sammanställda.



Ön: 1) Kurvan t.h. kallas för en <u>konkoid</u> och ges mha. pol. koord. av ekvationen
$r = h(\theta) = 2 + 1/\sin\theta$.
Beräkna arean hos den skuggade öglan i figuren.

2) Konkoiden ovan har två inflektionspunkter, markerade i figuren, där $d^2y/dx^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ och kurvan växlar från konvex till konkav. Visa att dessa punkter ges av ekvationen $(h(\theta))^2 + 2(h'(\theta))^2 = h(\theta) \cdot h''(\theta)$

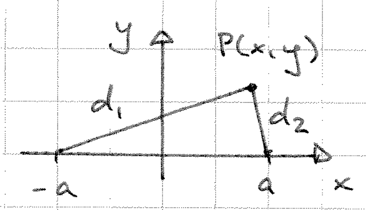
3) Skissa limaçonen $r = 2 - 4\sin\theta$ och beräkna arean hos området, som finns innanför stora öglan men utanför lilla öglan hos limaçonen.

4a) Beräkna arean hos ytan som uppstår, då kardioiden $r = a \cdot (1 + \cos\theta)$ roterar kring x-axeln.

b) Beräkna volymen hos kroppen innanför ytan.
(Se även anmärkningen vid första fredagens uppg. 4.)

Fortsättning på baksidan

On: Demo: För punkten $P(x,y)$ låter vi d_1 beteckna avståndet från P till punkten $(-a,0)$ och d_2 avståndet från P till $(a,0)$.



Vi studerar lemniskatan $C: d_1 \cdot d_2 = a^2$. Märk, att origo $\in C$. Vi bestämmer kurvans elevation, punkterna där den har horisontell eller vertikal tangent, arean innanför C samt arean hos ytan, som uppstår då C roterar kring y-axeln.

Fr: 1a) 9.1.10 b) 9.1.27

2a) 9.2.10 b) 9.2.14 c) 9.2.20

3) En dag leker Svakar med en stålkula. Han låter den falla mot ett betonggolv och lyssnar på klicken från studsarna, som kommer allt tätare, eftersom kulan förlorar energi vid varje studs (bl.a. i form av ljud: "Det sa bara 'klick!'." (citat: HMCG)). Det låter som om kulan studsar oändligt tätt mot slutet men att den slutar studsa efter en ändlig tid. För att undersöka fenomenet närmare släpper Svakar kulan från olika höjder h över golvet och observerar, att kulan studsar upp till höjden $p \cdot h$, där $p \in]0,1[$ och tycks vara oberoende av h.

a) (gymnasiefysik) Hur lång tid t_0 tar det för kulan att falla till golvet från höjden h_0, om kulans massa är m, gravitationsaccelerationen är g, vi bortser för enkelhets skull från luftmotståndet och antar att kulan är punktformig?

b) (högskolematematik) Om vi idealiserar och tänker oss att kulan studsar oändligt många gånger mot golvet och att varje studs är momentan, hur lång sträcka kommer kulan totalt att röra sig, innan den stannar, om den släppes från höjden h_0? I synnerhet: rör den sig totalt en ändlig eller en oändlig sträcka?

c) (dito) Hur lång tid tar det innan kulan stannar, om den släppes från höjden h_0? I synnerhet: tar det ändligt eller oändligt lång tid?

4a) 9.3.2 b) 9.3.11 c) 9.3.20 d) 9.3.26

Demo: 9.2.26–31