Institutionen för matematik
Tekniska högskolan   Metsalo

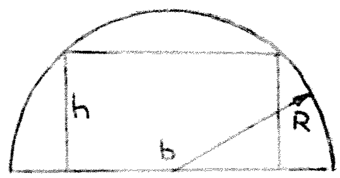
Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen, 15.1.2009

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJU, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

1. a) Bestäm basen b och höjden h hos rektangeln med maximal area, som ryms i en halvcirkel med radien R så att basen vilar på halvcirkelns diameter som i figuren till höger.
   b) Bestäm basen b och höjden h hos rektangeln med maximal omkrets, som ryms i en halvcirkel med radien R så att basen vilar på halvcirkelns diameter som i figuren till höger.
   (Förenkla svaren! Lämna t.ex. inte uttryck på formen $\sqrt{9}$ eller $\cos 0$, utan skriv i stället 3 resp. 1.)



2. Ekvationen $x^2 + e^{3x} = y + \cos y$ definierar funktionen $y = f(x)$ implicit i en omgivning av $x = 0$ så att $f(0) = 0$. Bestäm $f'(0)$ och $f''(0)$.

3. a) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$-matriser, så är även deras produkt AB inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   b) Komplexkonjugatet $\overline{z}$ av ett komplext tal $z = x + iy$ (där som bekant $i^2 = -1$) definieras som $\overline{z} = x - iy$. Visa att om $z_2 \neq 0$, så är $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.

4. a) Ur derivatans definition följer att identitetsfunktionen $I(x) = x = x^1$ har derivatan $I'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$ för alla x och att om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara, så är även $f(x) \cdot g(x)$ deriverbar och $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Använd dessa resultat och induktion för att visa att om $h(x) = x^n$, så är $h'(x) = n \cdot x^{n-1}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$.
   b) För $x > 0$ definierar vi $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ (detta medför naturligtvis, att F är naturliga logaritmen, men det hör egentligen inte hit). Visa att definitionen av funktionen F medför att $F(a) + F(b) = F(a \cdot b)$ för $a, b > 0$.

5. Då den skuggade triangeln i figuren till höger roterar kring y-axeln, uppstår en rät cirkulär kon. Dess volym är som bekant $V = \pi r^2 h/3$. Bekräfta detta genom att beräkna konens volym med hjälp av
   a) tvärsnittsmetoden,
   b) metoden med cylindriska skal.