Aalto-universitetet

Gripenberg

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 1 11.10.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (4p) Använd induktion (också om det finns andra sätt) för att visa att

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Lösning: Då $n = 1$ är $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ och eftersom också $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ så ser vi att formeln stämmer då $n = 1$. I nästa steg antar vi att påståendet gäller då $n = k$, dvs. $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k}{k+1}$. Vi visar att det också gäller då $n = k+1$ med hjälp av följande räkning där vi också använder induktionsantagandet:

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{k+1}\left(k + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k^2+2k+1}{k+2} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Vi ser alltså att formeln gäller då $n = k+1$, dvs. induktionssteget fungerar och därmed har vi visat att påståendet gäller.

---

2. (4p) Skriv $\dfrac{\overline{z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1+\mathrm{i}}$ där $z = 1 + \mathrm{i}$ som $a + b\,\mathrm{i}$ där a och $b \in \mathbb{R}$.

Lösning: Eftersom $\overline{z} = 1 - \mathrm{i}$ och $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$ så är

$$\frac{\overline{z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

---

3. (6p) Bestäm med hjälp av Gauss algoritm alla lösningar till följande ekvationssystem :

$$\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & -4x_4 & = & 6, \\
-4x_1 & -8x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = & -13, \\
6x_1 & +12x_2 & -7x_3 & -7x_4 & = & 13, \\
-4x_1 & -8x_2 & +5x_3 & +11x_4 & = & -31.
\end{array}$$

Lösning: Med hjälp av Gauss algoritm får vi

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 & 6 \\ -4 & -8 & 5 & 5 & -13 \\ 6 & 12 & -7 & -7 & 13 \\ -4 & -8 & 5 & 11 & -31 \end{bmatrix}
\quad \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1 \end{array}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -19 \end{bmatrix}
\quad \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \end{array}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}
\quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_3 \end{array}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Eftersom det inte finns något pivot-element i den andra kolumnen väljer vi $x_2 = t$. Från den tredje ekvationen som är $2x_4 = -6$ får vi $x_4 = -3$. Den andra ekvationen är $x_3 - 3x_4 = -1$ vilket innebär att $x_3 = -1 + 3x_4 = -1 - 9 = -10$. Den första ekvationen är $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 6$, och därför blir $x_1 = -2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = -2t - 10 - 6 + 3 = -13 - 2t$. Lösningen kan också skrivas i formen

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ -10 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

---

4. (3p) Antag att 3×3-matrisen A kan skrivas i formen $A = U \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}}$ där U och V är ortogonala 3×3-matriser. (Detta är en sk. singulärvärdesuppdelning.) Är A inverterbar? Motivera ditt svar. Om svaret är ja, ge ett uttryck för inversen av A.

Lösning: Eftersom ortogonala matriser som U och V^{T} är inverterbara, inversen av den diagonala matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} \end{bmatrix}$ och produkten av inverterbara matriser är inverterbar så är A inverterbar. Dessutom gäller $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ och eftersom $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$ och $(V^{\mathrm{T}})^{-1} = V$ så är

$$
A^{-1} = V \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U^{\mathrm{T}}.
$$

---

5. (4p) Bestäm matrisens $A = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ egenvärden. Med vilka kommandon i `matlab/octave` kan man räkna ut egenvärdena av A?

Lösning: Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (-10-\lambda) & 12 \\ -6 & (7-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Som lösningar får vi,

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} -1, \\ -2, \end{cases}$$

av vilket vi ser att egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$.

Med `matlab/octave` kan man ge kommandona

```
A=[-10 12; 6 7];
eig(A)
```

---

6. (3p) Låt $A = \begin{bmatrix} 26 & -19 & -5 \\ 27 & -20 & -5 \\ 33 & -23 & -8 \end{bmatrix}$. Visa att $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor för A och bestäm motsvarande egenvärde.

Lösning: Då man räknar ut AX får man

$$AX = \begin{bmatrix} 26 & -19 & -5 \\ 27 & -20 & -5 \\ 33 & -23 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (26-19-10) \\ (27-20-10) \\ (33-23-16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Detta visar att $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor för A med egenvärdet -3.
