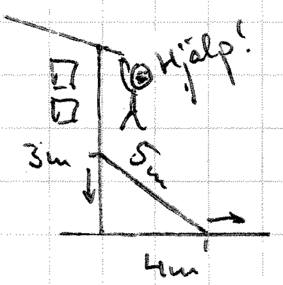
Gk1 i Matematik, hemtal v46/07 Metsalo

Deltentamen 2 äger rum tisdagen 20.11. kl. 16–19. Samma regler gäller som för deltentamen 1. Deltentamen 2 omfattar kap. R och 1–4.5 i Adams. De matematiska verktygen för kap. 3.4–4.5 ges i de tidigare avsnitten, så dessa tillägnas främst via självstudier.

På insidan finns ett exempel på integrering av en rationell funktion (jmf. m. kap. 6.3). De rationella funktionerna är den största funktionsklassen, vars anti-derivator är elementära funktioner. Integreringen sker i fyra steg:

1. Lång division, så täljarens gradtal blir lägre än nämnarens gradtal
2. Uppdelning av nämnarpolynomet i faktorer med grad ≤ 2. Detta kan vara svårt, om nämnaren har högt gradtal.
3. Uppdelning i partialbråk
4. Själva integreringen (steg 1–3 är förberedelser)

Ov: 1) En 5m lång stege glider ned längs och ut från en vägg. Då dess övre ända befinner sig på höjden 3m, glider den nedåt med farten 20cm/s. Hur fort glider nedre ändan ut från väggen just då?



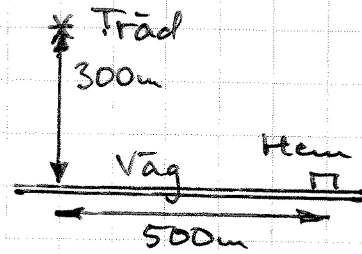
2a) Visa att av alla rektanglar, som får plats i en cirkel med radien R, är det kvadraten med sidan $\sqrt{2}R$, som har största arean.

b) Bestäm radien r och höjden h hos den räta cirkulära cylindern med största volymen, som får plats i en sfär med radien R.

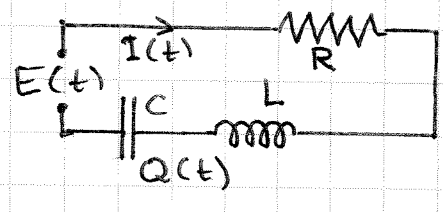
3) En plåtbehållare på formen av en rät cirkulär cylinder tillverkas av 2 cirkulära skivor (lock och botten) samt en rektangel (mantelytan). Den skall ha den föreskrivna volymen V. Vilket förhållande mellan radien r och höjden h hos cylindern minimerar plåtkostnaden, om priset per m^2 för plåten till mantelytan är 5 gånger så högt som priset per m^2 för plåten till lock och botten?

Forts. på baksidan.

On: 4) Calvin står under ett träd 300 m in i skogen. Pga. ett allvarligt tankefel vid planerandet av sitt uppförande vill han hem! Dit är det 500 m längs vägen. Calvin kan gå 4 km/h i skogen och 5 km/h längs vägen. Hur skall han gå för att komma hem så fort som möjligt och hur lång tid tar det honom att komma hem i så fall?



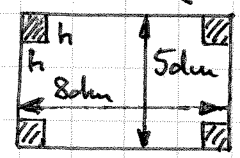
Demo: a) Vi studerar RLC-kretsen till höger. Strömmen $I(t)$ och laddningen $Q(t)$ satisfierar diff.-ekvationen
$$R \cdot I(t) + L \cdot I'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = E(t),$$
där $I(t) = Q'(t)$.

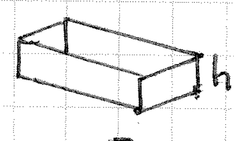


Vi bestämmer $Q_H(t)$ och $I_H(t)$ (homogena lösn., dvs. då $E(t) \equiv 0V$) i fallet $0\Omega < R < 2\sqrt{L/C}$ (vilket ger dämpad svängning).

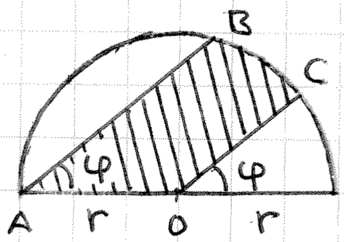
b) Därefter studerar vi fallet då vi lägger på en växelspänning $E(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t)$, där $\omega = 1/\sqrt{LC}$, speciellt den stationära lösn., som inte avklingar.

Fr: 1) Ur en rektangulär plåt med sidorna 8dm resp. 5dm skäres kvadrater med sidan h bort från hörnen. Sedan vikes sidorna upp, så man får en låda utan lock med höjden h. Vilket h maximerar lådans volym och hur stor är den maximala volymen.





2) Bestäm vinkeln φ så arean hos det skuggade området OABC maximeras.



3) 4.5.43/43/46 (uppl. 4/5/6) i Adams

4) 4.5.24/24/26 (uppl. 4/5/6) i Adams.

Demo: Dagens demo-tid används åt att besvara frågor inför mellanförhöret.

Exempel på integrering av rationella funktioner

Förberedelse (att skapa ett bra exempel)

$$x^2+3+\frac{2}{x}+\frac{-5}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2x+3}{x^2+4}=$$

$$=[(x^7-6x^6+16x^5-42x^4+75x^3-72x^2+108x)+$$
$$+(2x^4-12x^3+26x^2-48x+72)+(-5x^4+15x^3-20x^2+60x)+$$
$$+(x^3+4x)+(2x^4-9x^3+27x)]/[x\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+4)]=$$
$$=\frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}$$

Ex: Beräkna $\displaystyle\int\frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}\,dx$

1. grad(P) = 7 ≥ grad(Q) = 5 ⇒ lång division

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad\qquad +3 \\
\hline
x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x & x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72 \\
 & \underline{x^7-6x^6+13x^5-24x^4+36x^3} \\
 & \qquad 3x^5-19x^4+34x^3-66x^2+151x+72 \\
 & \qquad \underline{3x^5-18x^4+39x^3-72x^2+108x} \\
 & \qquad\qquad -x^4-5x^3+6x^2+43x+72
\end{array}$$

$$\therefore\ \frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}=$$
$$=x^2+3+\frac{-x^4-5x^3+6x^2+43x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}$$

2. Dela upp $Q(x)=x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x$ i faktorer. Vi ser, att x är en faktor.
$Q(x)=x\cdot(x^4-6x^3+13x^2-24x+36)$.
Hemtal 2, fr v42 ger att $x=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12$, ±18 och ±36 är möjliga rationella nollställen. Prövning ger att $x=3$ är ett nollställe, så vi kan faktorisera $Q(x)=x\cdot(x-3)\cdot(x^3-3x^2+4x-12)$. Samma sats ger att $x=3$ är ett dubbelt nollställe. $Q(x)=x\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+4)$. Detta kan inte faktoriseras mer, för x^2+4 saknar (reella) nollställen.

3. Dela upp i partialbråk.

$$x^2+3+\frac{-x^4-5x^3+6x^2+43x+72}{x(x-3)^2(x^2+4)} =$$

$$= x^2+3+\frac{A_{11}}{x}+\frac{A_{21}}{x-3}+\frac{A_{22}}{(x-3)^2}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+4}$$

Vi måste nu beräkna $A_{11}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, C_{11}$.

$$-x^4-5x^3+6x^2+43x+72 = A_{11}\cdot(x-3)^2(x^2+4) +$$
$$+ A_{21}\cdot x(x-3)(x^2+4) + A_{22}\cdot x(x^2+4) + (B_{11}x+C_{11})\cdot x(x-3)^2 =$$
$$= A_{11}\cdot(x^4-6x^3+13x^2-24x+36) + A_{21}\cdot(x^4-3x^3+4x^2-12x) +$$
$$+ A_{22}\cdot(x^3+4x) + B_{11}\cdot(x^4-6x^3+9x^2) + C_{11}\cdot(x^3-6x^2+9x) =$$
$$= x^4\cdot(A_{11}+A_{21}+B_{11}) + x^3\cdot(-6A_{11}-3A_{21}+A_{22}-6B_{11}+C_{11}) +$$
$$+ x^2\cdot(13A_{11}+4A_{21}+9B_{11}-6C_{11}) + x\cdot(-24A_{11}-12A_{21}+4A_{22}+9C_{11}) + 1\cdot(36A_{11})$$

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} A_{11} & +A_{21} & & +B_{11} & & =-1 \\ -6A_{11} & -3A_{21} & +A_{22} & -6B_{11} & +C_{11} & =-5 \\ 13A_{11} & +4A_{21} & & +9B_{11} & -6C_{11} & =6 \\ -24A_{11} & -12A_{21} & +4A_{22} & & +9C_{11} & =43 \\ 36A_{11} & & & & & =72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_{11}=2 \\ A_{21}=-5 \\ A_{22}=1 \\ B_{11}=2 \\ C_{11}=3 \end{array}\right.$$

Märk, att antalet ekvationer = antalet obekanta = grad(Q) = 5.

4. Integrera termvis.

$$\int \frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}\,dx = \{1.\} =$$

$$= \int\left(x^2+3+\frac{-x^4-5x^3+6x^2+43x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}\right)dx = \{2.\} =$$

$$= \int\left(x^2+3+\frac{-x^2-5x^3+6x^2+43x+72}{x(x-3)^2(x^2+4)}\right)dx = \{3.\} =$$

$$= \int\left(x^2+3+\frac{2}{x}+\frac{-5}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{3}{x^2+4}\right)dx =$$

= {först nu utförs alltså själva integreringen} =

$$= \frac{x^3}{3}+3x+2\ln|x|-5\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}+\ln|x^2+4|+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C =$$

$$= \frac{x^3}{3}+3x+\ln(x^2)-5\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}+\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$$

Funktionen är integrerbar i $]-\infty,0[$, $]0,3[$, $]3,\infty[$.
I olika intervall kan vi ha olika konstanter C.