Gk1 i Matematik, hemtal v38/07 Metsalo

På insidan attackeras två linjära ekvationssystem mha. Gauss' elimination och bakåtsubstitution vid sidan av exemplen i kap. 1 i Lay.

Ön: 1a) Visa att $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ och $\overline{(-z)}=-\overline{z}$ samt mha. detta att $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

b) Visa att $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ och $\overline{(1/z)}=1/\overline{z}$ (för $z\neq 0$) samt mha. detta att $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$ (för $z_2\neq 0$)

c) Visa mha. induktion att $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}$ för $n=1,2,3,\ldots$

2) Låt p vara ett polynom med reella koefficienter, dvs. $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$, där $a_k\in\mathbb{R}$. Visa att om $z=\alpha+i\beta$ är ett nollställe till p, dvs. om $p(\alpha+i\beta)=0$, så är även $\overline{z}=\alpha-i\beta$ ett nollställe till p. Icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter kommer i komplex-konjugerade par!

3) Bestäm alla punkter $z=x+iy$ i komplexa talplanet sådana att $(z-3)/(z+4i)$ är rent imaginärt.

4a) Visa att $z=i$ är ett nollställe till 3:e-gradspolynomet $p(z)=z^3+(-2-5i)z^2+(-10+10i)z+(8+6i)$.

b) Eftersom $z=i$ är ett nollställe till $p(z)$, kan $p(z)$ faktoriseras på formen $p(z)=(z-i)\cdot q(z)$, där $q(z)=az^2+bz+c$ är ett 2:a-gradspolynom. Bestäm $q(z)$.

c) Bestäm q:s nollställen på formen $z=x+iy$.

Demo: Fritt efter E. A. Poe (tror jag att det var):

Den gamle sjörövaren berättade på sin dödsbädd:
"Jag startade vid galgeken, gick raka vägen till stenröset, sedan lika långt åt höger och slog ned en påle i marken. Sedan återvände jag till galgeken, gick raka vägen till källan, sedan lika långt åt vänster och slog ned en ny påle. Jag begravde skatten mitt mellan pålarna och drog sedan ut dem."
Då vi kom till ön hittade vi stenröset och källan, men galgeken hade ruttnat bort, så vi fann inga spår efter den. I en uppenbarelse såg jag dock galgekens plats och sedan hade vi inga svårigheter att hitta skatten. Detta var min första uppenbarelse och skatten är det tydligaste beviset på att mina uppenbarelser är sanna.

Fredagens hemtal på baksidan

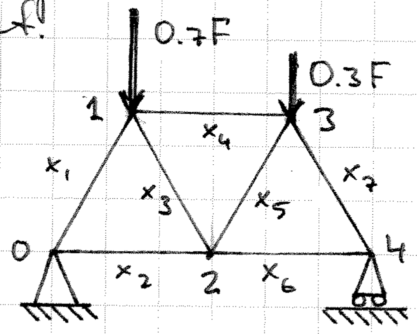
Fr: 1) Lite logik: låt $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ vara en mängd bestående av tre inte nödvändigtvis olika komplexa tal med egenskaperna a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$ och b) $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bar{\lambda}$ och $1/\lambda \in \Lambda$ (varvid λ, $\bar{\lambda}$ och $1/\lambda$ inte behöver vara olika). Visa att det komplexa talet 1 måste tillhöra Λ.

2) $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 5z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$ Lös det linjära ekv.systemet till vänster genom att först skriva om det på echelon-form mha. Gauss' elimination, sedan på reducerad echelon-form mha. bakåtsubstitution och genom att slutligen kontrollera svaret mha. insättning i det ursprungliga ekvationssystemet.

3) $$\begin{cases} \frac{5}{x+3y} + \frac{6}{x+z} = 2 \\ \frac{10}{x+3y} + \frac{7}{2y-z} = -3/2 \\ \frac{15}{x+z} + \frac{4}{2y-z} = 1/2 \end{cases}$$ Lös ekvationssystemet genom att införa 3 nya variabler u, v och w via $u = 1/(x+3y)$, $v = 1/(x+z)$ och $w = 1/(2y-z)$.

4a) $$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 5x + 4y + 2w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ y + 5z + 3w = 0 \end{cases}$$ Bestäm allmänna lösningen till det linjära, homogena ekvationssystemet mha. Gauss' elim. och bakåtsubstitution.

b) $$\begin{cases} x + y + 2z - w = 3 \\ 3x - y + z - 2w = 1 \\ 2x - 2y - z - w = -2 \\ x - 3y - 3z = -5 \end{cases}$$ Dito för det linjära, inhomogena ekvationssystemet!



Demo: Fackverket till höger består av 7 stag, förenade i 5 noder och bildar 3 liksidiga trianglar. Nod 0 är fäst vid underlaget, så det kan upptaga såväl horisontella som vertikala krafter, medan nod 4 rullar mot underlaget och kan bara upptaga vertikala krafter. Fackverket belastas med en kraft F, fördelad som i figuren ovan. Vi bestämmer dragkraften x_k i stag k (positiv, om staget drar i sina ändnoder och noderna i staget, negativt annars) för $k = 1, 2, \ldots, 7$.

Ex1: Svatta, Svakar och deras gode vän kanelten Pelle köpte godis. Svakar köpte tre lakritsstänger och två kokosbollar för 12 mk, Pelle köpte tre slickepinnar, en lakritsstång och en kokosboll för 13 mk och Svatta köpte en slickepinne, fem lakritsstänger och en kokosboll för 12 mk. Vad kostade slickepinnen, lakritsstången resp. kokosbollen?

Lösn: s, l och k är priset i mark.

$$\begin{cases} \text{Svakar: } 0s + 3l + 2k = 12 \text{ (mk)} \\ \text{Pelle: } 3s + 1l + 1k = 13 \\ \text{Svatta: } 1s + 5l + 1k = 12 \end{cases}$$

Sätt upp motsvarande sammansatta matris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \{r1 \leftrightarrow r2\} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & 1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} nr2 = r2 - \frac{0}{3}\cdot r1 \\ nr3 = r3 - \frac{1}{3}\cdot r1 \\ \text{1:a kol. ok} \end{Bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 14/3 & 2/3 & 23/3 \end{pmatrix} \sim \left\{ nr3 = r3 - \frac{14/3}{3}\cdot r2 \right\} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -22/9 & -11 \end{pmatrix}$$

· Gauss' elimination är slutförd. Den nya matrisen är på echelon-form och vi ser att det linjära ekvationssystemet har en unik lösning.

Det nya, men ekvivalenta lin. ekv. systemet är

$$\begin{cases} 3s + 1l + 1k = 13 \\ 0s + 3l + 2k = 12 \\ 0s + 0l - \frac{22}{9}k = -11 \end{cases}$$

Den nya matrisen omvandlas nu till reducerad echelon-form mha. bakåtsubstitution:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -22/9 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} nr3 = \frac{1}{-22/9}\cdot r3 \\ nr2 = r2 - 2\cdot nr3 \\ nr1 = r1 - 1\cdot nr3 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 17/2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9/2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Bmatrix} nr2 = \frac{1}{3}\cdot r2 \\ nr1 = r1 - 1\cdot nr2 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 15/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9/2 \end{pmatrix} \sim \left\{ nr1 = \frac{1}{3}\cdot r1 \right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9/2 \end{array}\right)$$

Det nya, men ekvivalenta lin. ekv. systemet är nu

$$\begin{cases} 1\cdot s + 0\cdot l + 0\cdot k = 5/2, & \text{dvs. } s = 2.50 \text{ (mk)} \\ 0\cdot s + 1\cdot l + 0\cdot k = 1, & \text{dvs. } l = 1 \\ 0\cdot s + 0\cdot l + 1\cdot k = 9/2, & \text{dvs. } k = 4.50 \end{cases}$$

Vi får att slickepinnen kostar 2.50 mk, lakritsstången 1.00 mk och kokosbollen 4.50 mk och att andra lösningar saknas. Vi gör dock klokt i att kontrollera svaret via insättning i det ursprungliga problemet.

Ex 2: Svakar, Svatta, Pelle och teknologen Osquar köpte godis. Svakar köpte två chokladkakor, fem gräddkolor och tre lakritsstänger för 23 mk, Svatta köpte en chokladkaka, sju gräddkolor och en lakritsstång för 13 mk, Pelle köpte en chokladkaka och sexton gräddkolor för 16 mk och Osquar köpte fyra chokladkakor, en gräddkola och sju lakritsstänger. Hur mycket kostade Osquars godis? Vad kostade chokladkakan, gräddkolan resp. lakritsstången?

Lösn: c, g och l är priset i mark. Beteckna priset för Osquars godis med x.

$$\begin{cases} \text{Svakar: } 2c + 5g + 3l = 23 \\ \text{Svatta: } 1c + 7g + 1l = 13 \\ \text{Pelle: } 1c + 16g + 0l = 16 \\ \text{Osquar: } 4c + 1g + 7l = x \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 1 & 7 & 1 & 13 \\ 1 & 16 & 0 & 16 \\ 4 & 1 & 7 & x \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{Bmatrix} nr2 = r2 - \frac{1}{2}\cdot r1 \\ nr3 = r3 - \frac{1}{2}\cdot r1 \\ nr4 = r4 - \frac{4}{2}\cdot r1 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 27/2 & -3/2 & 9/2 \\ 0 & -9 & 1 & x-46 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} nr3 = r3 - \frac{27/2}{9/2}\cdot r2 \\ nr4 = r4 - \frac{-9}{9/2}\cdot r2 \end{Bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-43 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2c + 5g + 3l = 23 \\ 0c + \frac{9}{2}g - \frac{1}{2}l = 3/2 \\ 0c + 0g + 0l = 0 \\ 0c + 0g + 0l = x - 43 \end{cases}$$

Vi får att $x = 43$, för annars saknas lösning. $\therefore$ Osquars godis kostade <u>43 mk.</u> Vidare får vi en fri parameter (lämpligast l) och kan uttrycka c och g mha l via bakåtsubst.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} nr2 = \frac{1}{9/2}\cdot r2 \\ nr1 = r1 - 5\cdot nr2 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 32/9 & 64/3 \\ 0 & 1 & -1/9 & 1/3 \end{pmatrix} \sim$$

(Vi kan strunta i de två sista ekvationerna i vårt nya system.)

$$\sim \{nr1 = \tfrac{1}{2}\cdot r1\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16/9 & 32/3 \\ 0 & 1 & -1/9 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Det nya, men ekvivalenta ekv. systemet är nu

$$\begin{cases} 1\cdot c + 0\cdot g + \frac{16}{9}\cdot l = \frac{32}{3}, \text{ dvs. } \underline{c = \frac{32}{3} - \frac{16}{9}\cdot l} \\ 0\cdot c + 1\cdot g - \frac{1}{9}\cdot l = \frac{1}{3}, \text{ dvs. } \underline{g = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot l} \end{cases}, \ l \in \mathbb{R} \text{ valfri}$$

Pga. problemets natur är c, g och $l \geq 0$, men vi får inga entydiga värden på c, g och l.