Gk1 i Matematik, kuntal v 41/05 Metsolo

Deltentamen 1 äger rum måndagen 17.10. kl. 16-19. Sal kommer att anslås utanför K-salen, i huvudaulan och oftast också utanför tentamenssalarna senast en timme före tentamen. Deltentamen 1 omfattar de algebraiska grundbegreppen, induktion, komplexa tal samt kap. 6.1-7.3 i Kreyszig. Märk dock att flera av bevisen av resultaten i kap. 7.3 finns i kap. 7.4. Studera dem där! Till deltentamina får vanliga funktionsräknare medtagas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte medtagas. Tentanden måste kunna legitimera sig.

http://math.helsinki.fi/opetus/misc/tenttiohjeet.html.se innehåller mera information om reglerna för tentamina.

Torsdagen 20.10. har vi 1:a datorövningen, då vi använder Matlab. På insidan av detta blad finns en liten sammanfattning av vad vi kommer att göra härnäst, då vi börjar med Ablans.

Ti: 1a) Visa att $\{\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3, \bar v_4\} = \{[0,0,0,1],[0,0,1,0],[0,3,0,-1],[5,0,-3,0]\}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$ och skriv $\bar u = [1,1,2,1]$ som en linjär kombination av $\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3$ & $\bar v_4$, dvs. på formen $c_1\bar v_1 + c_2\bar v_2 + c_3\bar v_3 + c_4\bar v_4$.

b) Visa att $\{\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\} = \{[2,1,3],[1,-2,0],[6,3,-5]\}$ bildar en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ och använd ortogonaliteten till att skriva $\bar u = [3,1,1]$ som en lin. komb. av $\bar e_1, \bar e_2$ & $\bar e_3$.

2a) Inför en inre produkt i vektorrummet P_3 bestående av polynom av grad ≤ 3 via $\langle f, g\rangle \stackrel{def}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Visa att polynomen $p_0(x) \equiv 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 3x^2 - 1$ och $p_3(x) = 5x^3 - 3x$ bildar en ortogonal bas för P_3 under denna inre produkt.

b) Använd ortogonaliteten till att skriva $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ som en lin. komb. av p_0, p_1, p_2 & p_3.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a) För ett visst värde på α är $\bar x$ en egenvektor till A. Bestäm detta α-värde samt egenvärdet λ, till vilket $\bar x$ i så fall hör.

b) A och A^T har samma egenvärden. Bestäm en egenvektor till A^T, som hör till λ i a)-delen.

4a) En matris $A \ni A^2 = A$ kallas idempotent. Visa att idempotenta matriser endast kan ha egenvärdena 0 och 1.

b) Visa att parallellprojektionsmatrisen $P = I - \frac{1}{\hat n^T \bar s}\,\bar s\,\hat n^T$ i manipulation 4 i supplement 1 är idempotent.

Forts. på baksidan.

Demo: Låt A ha egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Vi visar att

a) A^T har också egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

b) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

c) A^{-1} existerar om och endast om $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0$

d) Om A^{-1} $\exists$, är dess egenvärden $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$.

Fr: 1) Låt $A = \begin{pmatrix} -15 & 24 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$ och $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a) Beräkna $\det(A)$ b) Bestäm $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$

c) Lös det. linjära ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$

d) Bestäm A:s karakteristiska polynom $p_A(\lambda)$

e) Bestäm A:s egenvärden

f) Bestäm egenvektorerna till resp. egenvärde.

2) B är en godtycklig $n \times n$-matris. Visa att om λ är ett egenvärde till B, så är λ^2 ett egenvärde till B^2.

3) På sid. 31 i Adams definieras udda och jämna funktioner. Vi studerar hur dessa egenskaper bevaras under addition, subtraktion, multiplikation, division och sammansättning av funktioner. Om f t.ex. är en jämn fkn och g en udda fkn, behöver $f+g = g+f$ varken vara udda eller jämn. Ex: $f(x) = x^2$ (jämn), $g(x) = x^3$ (udda) $\Rightarrow (f+g)(x) = (g+f)(x) = x^2 + x^3$, så $f+g = g+f$ är varken udda eller jämn. Om däremot f och g är jämna fkner, så är även $f \cdot g = g \cdot f$ en jämn fkn: $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = \{f, g \text{ jämna}\} = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$. Och om f är en jämn fkn och g en udda fkn så är $f \circ g$ en jämn fkn: $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = \{g \text{ udda}\} = f(-g(x)) = \{f \text{ jämn}\} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

Om vi låter J stå för jämna fkner och U för udda fkner, kan vi bilda 5 tabeller för add., subtr., mult., div. resp. sammansättning av fkner. 4 satser har vi visat ovan. Komplettera tabellerna. (Visa alltså 16 satser!)

+	J	U
J		X
U	X	

−	J	U
J		
U		

·	J	U
J	J	
U		

÷	J	U
J		
U		

∘	J	U
J		J
U		

4) Antag att f:s definitionsmängd är origo-symmetrisk, dvs. att $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$. I så fall är $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Visa att $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ är en jämn fkn och $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ en udda fkn. Visa också att det är enda sättet att skriva f som summan av en jämn och en udda funktion.

Demo-tiden används till besvarande av frågor.