Mat-1.3460 **Funktionaalianalyysin perusteet**

Luennot: ti 10-12 Y228

K. Peltonen to 12-14 H-sali

Harjoitukset: pe 12-14 Y228

D. Aalto alk. 21.9.

Suoritus: 2 välikoetta (2×24p)

\+ harjoituspisteet (6p)

tai tentti

1 vk. 27.10. 10-13

2. vk. 17.12. 16-19

Kurssimateriaali:

- luentomuistiinpanot
- Kreyszig: Introductory Functional Analysis with Applications

Muuta kirjallisuutta :

G. Vainikko : luentomuistiinpanot 2002

K. Astala, P. Piiroinen : FAP, Hy 2006

B. Rynne, M. Youngson : Linear FA, Springer

D. Werner : Funktionalanalysis, Springer

...

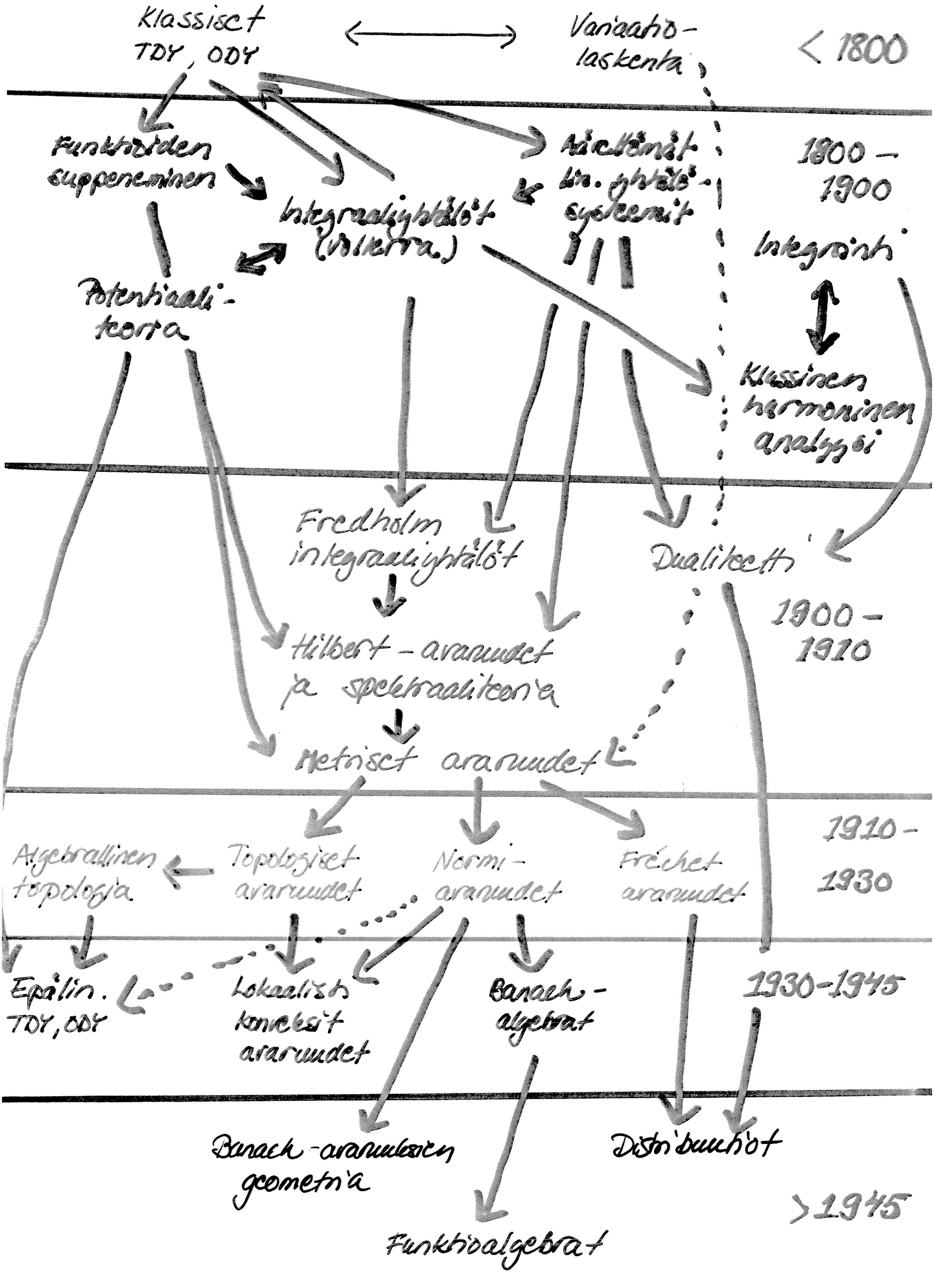
FA historiaa :

J. Dieudonne : History of FA, North-Holland

A. F. Monna : Functional analysis in historical perspective

Development of Mathematics 1900-1950
J. P. Pier (Ed) : G. Fichera : Volterra & FA

...


Klassiset TDY, ODY
Variaatiolaskenta
< 1800
Funktioiden suppeneminen
Integraaliyhtälöt (Volterra)
Äärettömät lin. yhtälösysteemit
1800 – 1900
Integrointi
Potentiaaliteoria
Klassinen harmoninen analyysi
Fredholm integraaliyhtälöt
Dualiteetti
1900 – 1910
Hilbert-avaruudet ja spektraaliteoria
Metriset avaruudet
1910 – 1930
Algebrallinen topologia
Topologiset avaruudet
Normiavaruudet
Fréchet avaruudet
Epälin. TDY, ODY
Lokaalisti konveksit avaruudet
Banach-algebrat
1930–1945
Banach-avaruuksien geometria
Distribuutiot
>1945
Funktioalgebrat

$\boxed{\text{1750 : funktion käsite}}$

Isaac Newton (1642-1727)
Jacques (1645-1705) & Jean (1667-1748) Bernoulli
Leonard Euler (1701-1783)
Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)

[redacted]

---

funktionaali (1880-1910)

"funktiot, jotka riippuvat muista funktioista"

"suorien funktiot"

Vito Volterra (1853-1936)

Giuseppe Peano (1858-1932)

Salvatore Pincherle (1853-1936)

Jacques Hadamard (1865-1963) "funktionaali"

$\boxed{\text{1800-luku : "funktioiden teoria"}}$

"lin. avaruus"

Maurice Fréchet (1878-1973)
René Gateaux (1880-1914)
Paul Lévy (1886-1943)

1900-luku :
- algebraisointi
- strukturointi
- topologian vahva vaikutus

David Hilbert (1862-1943)
Henri Poincaré (1854-1912)
Frigyes Riesz (1880-1956)

ei "avaruuden" käsitettä

1913 : "Hilbertin avaruus"

Ivar Fredholm (1866-1927)
John von Neumann (1903-1957)

1930 : H-avaruuksien aksiomaattinen teoria

Erhard Schmidt (1876-1959)
Eduard Helly (1884-1943)
Hans Hahn (1879-1934)
Stefan Banach (1892-1945)
Norbert Wiener (1894-1964)

Funktionaalianalyysi perusteet s. 2007

1. Metriset avaruudet (kertausta)

2. Vektoriavaruudet (kertausta)

3. Normiavaruudet ja Banach-avaruudet

4. Lineaariset operaattorit

5. Hilbertin avaruudet

6. Hilbertin avaruudet ja Fourier-sarjat

7. Bairen lause ja tasaisen rajoituksen periaate

8. Avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet

9. Dualiteetti ja Rieszin esityslause

10. Hahn-Banachin lause ja seurauksia

11. Hilbertin avaruuden lineaariset operaattorit

12. Kompaktit operaattorit

1. Metriset avaruudet (kertausta)

1.1. Määritelmä

Ol. $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus

$d: X \times X \to \mathbb{R}$ on <u>metriikka</u> joukossa X, jos pätee

(1) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in X$ (Δ-ey)

(2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$

(3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Pari (X,d) on <u>metrinen avaruus</u>.

<u>Huom</u>. Pätee $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$ (HT)

<u>Esim</u>. 1° $(\mathbb{R}^n, d_e)$ $\quad d_e(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2}$ kun

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ <u>euklidinen metriikka</u>

2° $(C(0,1), d_\infty)$ $\quad C(0,1) = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$

normi $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ $\quad (< \infty \quad \forall\, f \in C(0,1))$

indusoi metriikan d_∞: $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$

joukkoon $C(0,1)$.

<u>Merkintöjä</u>: Jos (X,d) metrinen avaruus, $x \in X$, $r > 0$ niin

$B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$ <u>avoin</u> x-keskinen r-säteinen <u>kuula</u>

$\overline{B}(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) \leq r \}$ <u>suljettu</u> " " <u>kuula</u>

$S(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) = r \}$ x-keskinen r-säteinen <u>pallo</u>

Muodasta tutut metrisen avaruuden topologiset käsitteet

avoin, suljettu joukko, ympäristö, sisäpiste, sulkeuma, kompakti joukko, jatkuva kuvaus, kasautumispiste, ...

Muistin virkistämiseksi: Ol. $(\bar{X}, d)$ metrinen avaruus

<u>Määritelmiä</u>: $M \subset \bar{X}$ on <u>avoin</u> jos $\forall x \in M\ \exists r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset M$
Merk. $M \subset\circ \bar{X}$.

$K \subset \bar{X}$ on <u>suljettu</u> jos $\bar{X} \setminus K$ on avoin. Merk. $K \subset\subset \bar{X}$.

Pisteen x <u>ympäristö</u> on joukko $N \subset \bar{X}$ s.e. $B(x,r) \subset N$ jollakin $r > 0$. (Usein vaaditaan: ympäristö avoin joukko mutta täsmennetään tarvittaessa)
$B(x,r)$ on x:n <u>kuulaympäristö</u>
Joukon $M \subset \bar{X}$ <u>sisäpiste</u> on piste x s.e. $B(x,r) \subset M$ jollakin $r > 0$.

Joukon M <u>sisus</u> $M^0 = int(M)$ on sen sisäpisteiden joukko ($M^0 \subset M$ laajin M:n avoin osajoukko)

Joukon $\bar{X}$ <u>topologia</u> $\mathcal{T}$ on jokin kokoelma $\bar{X}$:n osajoukkoja s.e. seuraavat ehdot ovat voimassa

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $\bar{X} \in \mathcal{T}$
(2) $T_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha \in \mathcal{T}$ (I mv. indeksijoukko)
(3) $T_j \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} T_j \in \mathcal{T}$

Tällä kurssilla tarkastellaan yleensä <u>metriikan d indusoimaa topologiaa</u> $\mathcal{T}_d = \{U \mid U \subset\circ \bar{X}\}$

$x \in \bar{X}$ on joukon $M \subset \bar{X}$ <u>kasautumispiste</u> jos $\forall$ x:n ympäristö sisältää pisteen $y \in M$, $y \neq x$.

($x \in \bar{X}$ on joukon $M \subset \bar{X}$ <u>kosketuspiste</u> jos $\forall$ x:n ympäristö sisältää pisteen $y \in M$)

Joukon M <u>sulkeuma</u> $\bar{M} = \{x \in \bar{X} \mid x$ on M:n kosketuspiste$\}$
$= M \cup \{x \in \bar{X} \mid x$ on M:n kasautumispiste$\}$
$= \{x \in \bar{X} \mid \exists$ jono $(x_n) \subset M$ s.e. $d(x_n, x) \to 0$ kun $n \to \infty\}$

Joukko M on <u>tiheä</u> $\bar{X}$:ssä jos pätee $\bar{M} = \bar{X} \Leftrightarrow$
$B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ $\forall x \in \bar{X}, r > 0 \Leftrightarrow U \cap M \neq \emptyset$ $\forall$ $\emptyset \neq U \subset\circ \bar{X}$.

$\bar{X}$ on <u>separoituva</u> jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

<u>Esim</u> 1° $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}}$ separoituva

2° $(\mathbb{R}^n, d_e)$ on separoituva: $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ valitaan $\forall\, j \in \{1, \dots, n\}$ $q_j \in \mathbb{Q}$ (1°) s.e. $|x_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, $j = 1, \dots, n$. Tällöin $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ (nva!) ja

$$d(x,q) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j - q_j|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}} \Big)^{1/2} < \Big(n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} \Big)^{1/2} = \varepsilon .$$

3° $(C[a,b], d_\infty)$ Weierstrassin approksimaatiolause: Reaaliarvoiset välin $[a,b]$ polynomit tiheässä $(C[a,b], d_\infty)$:ssä. (L4)

1.2. __Lause__ Ol. $\mathbb{X}$ metrinen avaruus ja $\exists$ ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden $\mathbb{X}$ avoimia pisteneraita epätyhjiä osajoukkoja. Tällöin $\mathbb{X}$ ei ole separoituva.

__Tod:__ VO: $\mathbb{X}$ separoituva ł. $\mathbb{X} = \overline{A}$, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Olk. $U \in \mathcal{U}$ ł. $\emptyset \neq U \subset_o \mathbb{X}$ $\Rightarrow$ $\exists$ indeksi $n_U \in \mathbb{N}$ s.e. $a_{n_U} \in U$. Tämä ehto määrää kuvauksen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{N}$, $f(U) = n_U$. f on injektio: $\forall\, U, V \in \mathcal{U}$ $U \neq V$ pätee $U \cap V = \emptyset$, joten $a_{n_U} \neq a_{n_V}$ $\Rightarrow$ $n_U \neq n_V$. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ numeroituva $\lightning$. □

Lisää "Määritelmiä" Ol. $(\mathbb{X}, d)$ metrinen avaruus

Jono $(x_n) \subset \mathbb{X}$ __suppenee__ kohti pistettä $x \in \mathbb{X}$ merk. $x_n \to x$ kun $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ ł. $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $d(x_n, x) < \varepsilon$ $\forall\, n \geq n_\varepsilon$.

Joukko $M \subset \mathbb{X}$ on __rajoitettu__ jos sen läpimitta

$$\delta(M) := \sup_{x,y \in M} d(x,y) \quad \text{on äärellinen.}$$

1.3. __Lause__

(a) $\mathbb{X}$:n suppeneva jono on rajoitettu ja sen raja-arvo on 1-käsitteinen

(b) $x_n \to x$, $y_n \to y$ $\Rightarrow$ $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$

__Tod:__ (a) Ol. $(x_n) \subset \mathbb{X}$ $x_n \to x$, $\varepsilon > 0$ ja n_ε s.e. $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\forall\, n, m \geq n_\varepsilon$: $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\delta(M) < \infty$

Ol. $x_n \to x$, $x_n \to y$, $\varepsilon > 0$ ja n_ε s.e. $d(x, x_n), d(y, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\Rightarrow$ $d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon$ kun $n \geq n_\varepsilon$
$\Rightarrow$ $d(x,y) = 0$ $\Rightarrow$ $x = y$.

(b) Ol. $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\varepsilon > 0$ ja n_ε s.e. $d(x_n, x), d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ (1.4.)

Δ-ey $\Rightarrow$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \varepsilon$$

vast. $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$

$$\Rightarrow \quad d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon . \square$$

1.4. **Määritelmä** Metrisen avaruuden (X, d) jono (x_n) on **Cauchy-jono** jos $d(x_n, x_m) \to 0$ kun $n, m \to \infty$.

1.5. **Lause** Jokainen metrisen avaruuden suppeneva jono on Cauchy-jono.

Tod: Δ-ey $\square$.

1.6. **Määritelmä** Metrinen avaruus on **täydellinen** jos jokainen Cauchy-jono suppenee.

1.7. **Lause** $(\mathbb{R}^n, d_e)$ on täydellinen.

($n \geq 2$ seuraa $\mathbb{R}$:n täydellisyydestä)

Esim $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ei täydellinen

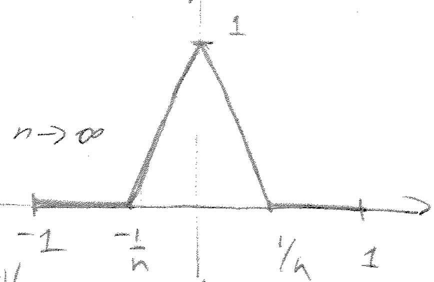
Esim. $C([-1,1]) = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$

d_1: $d_1(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| \, dt$ metriikka

Jonolle (f_n)
$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1] \\ nt + 1, & t \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ -nt + 1, & t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

pätee:

$$d_1(f_n, 0) = \int_{-1}^{1} f_n(t) \, dt = \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$



joten $f_n \to 0_{C([-1,1])}$.

Toisaalta: d_∞: $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t) - g(t)|$ metriikka

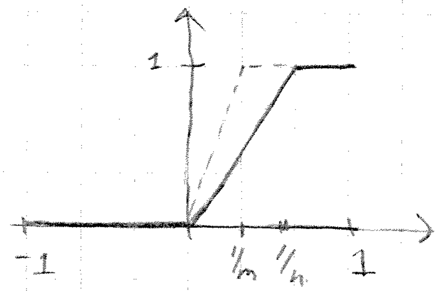
ja $d_\infty(f_n, 0) = \sup_{t \in [-1,1]} |f_n(t)| = 1$

joten $f_n \not\to 0$ metrisessä avaruudessa $(C[-1,1], d_\infty)$

Esim $(C[-1,1], d_1)$ $\quad f_n(t) = \begin{cases} 0, & t\in[-1,0] \\ nt, & t\in[0,\frac{1}{n}] \\ 1, & t\in[\frac{1}{n},1] \end{cases}$ (1.5)

$$d_1(f_n,f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(t)-f_m(t)|\,dt$$

$$\le \frac{2}{\min\{n,m\}} \to 0$$



$\therefore$ (f_n) Cauchy-jono

Toisaalta (f_n) ei voi supeta kohti mitään jatkuvaa funktiota f, sillä tälle täytyisi päteä

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t\in(0,1] \\ 0, & \text{kun } t\in[-1,0) \end{cases}$$

$\therefore$ $(C[-1,1], d_1)$ ei täydellinen.

1.8. Lause Ol. (X,d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq M \subset X$.
Tällöin
(a) $x\in\overline{M} \iff \exists$ jono $(x_n)\subset M$ s.e. $x_n\to x$
(b) M on suljettu $\iff \big((x_n)\subset M,\ x_n\to x \Rightarrow x\in M \big)$
(c) $\overline{M}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon M.

Tod: (a) "$\Rightarrow$" Ol $x\in\overline{M}$. Jos $x\in M$ niin jono (x_n), missä $x_n = x \ \forall n$ on etsitty jono.
Jos $x\notin M$ se on M:n kasautumispiste ja $\forall n\in\mathbb{N}$ löytyy $x_n\in M\cap B(x,\frac{1}{n})$.
$\Rightarrow M\ni x_n \to x$.
"$\Leftarrow$" Ol. $\exists\ (x_n)\subset M$ s.e. $x_n\to x$. Jos $x\in M$ niin väite selvä. Jos $x\notin M$ niin $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon$ s.e. $x_n\in B(x,\varepsilon)$ kun $n\ge n_\varepsilon$ $\Rightarrow$ x M:n kasautumispiste $\Rightarrow x\in\overline{M}$.
(b) M suljettu $\iff X\setminus M$ avoin
"$\Rightarrow$" Olk. $(x_n)\subset M$, $x_n\to x$. Jos $x\notin M$ niin $x\in X\setminus M$ ja $B(x,\varepsilon)\subset X\setminus M$ jollakin $\varepsilon>0$. Toisaalta $x_n\in B(x,\varepsilon)\subset X\setminus M$ $\forall\ n\ge n_\varepsilon$ $\Rightarrow x_n\notin M$ kun $n\ge n_\varepsilon$ $\lightning$.
"$\Leftarrow$" Os. $X\setminus M$ avoin: Olk. $x_0\in X\setminus M$. Löytyykö $\varepsilon>0$ s.e. $B(x_0,\varepsilon)\subset X\setminus M$. Jos ei niin $B(x_0,\frac{1}{n})\not\subset X\setminus M$ millään $n\in\mathbb{N}$. Val $\forall n$ $x_n\in B(x_0,\frac{1}{n})\cap M$. Nyt $x_n\to x_0$ ja Ol. $\Rightarrow x_0\in M$ $\lightning$. Siis ε löytyy ja $X\setminus M$ avoin.
(c) (HT)

2. Vektoriavaruudet (kertausta)

Ol. skalaarikunta $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$

2.1. Määritelmä $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus on joukko $\bar{X} \neq \emptyset$ varustettuna laskutoimituksilla

(1) $\bar{X} \times \bar{X} \to \bar{X}$ $\quad (x,y) \longmapsto x+y$, $\; x,y \in \bar{X}$ vektoreiden yhteenlasku

(2) $\mathbb{K} \times \bar{X} \to \bar{X}$ $\quad (\alpha, x) \longmapsto \alpha x$, $\; \alpha \in \mathbb{K},\ x \in \bar{X}$ skalaarilla kertominen

s.e. pätee

$(\bar{X},+)$ Abelin ryhmä: (1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(2) $\exists !\ 0 \in \bar{X}: \ x+0 = 0+x = x \quad \forall x \in \bar{X}$

(3) $\forall x \in \bar{X}\ \exists !\ (-x) \in \bar{X}: \ x+(-x) = 0$

(4) $x+y = y+x$

tulon osittelulait: (5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ x,y \in \bar{X}$

(6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

(7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(8) $1 \cdot x = x$

Merk lyhyesti $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, $0_{\bar{X}} \in \bar{X}$ symbolilla 0.

Seurauksia:

$0 \cdot x = 0$! $\quad 0 \cdot x = (0+0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = 0$

$\alpha \cdot 0 = 0$! $\quad \alpha \cdot 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha \cdot 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0$

$(-1)x = -x$! $\quad x + (-1)x = (1+(-1))x = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow (-1)x = -x$

2.2. Määritelmä Ol. $\bar{X}$ v.a. Vektorit $x_1, \dots, x_n \in \bar{X}$ ovat lineaarisesti riippuvat (sidotut) jos $\exists$ skalaarit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ s.e. $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$ ja $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

Vektorit $x_1, \dots x_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat (vapaat) jos ne eivät ole lineaarisesti riippuvat e.

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Joukko $\emptyset \neq S \subset \bar{X}$ on lin. riippumaton (vapaa) jos vektorit $x_1, \dots, x_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.3. Määritelmä V.a. $\bar{X}$ on äärellisulotteinen jos $\exists\ n \in \mathbb{N}$ s.e. jokainen vähintään n:n vektorin osajoukko on lineaarisesti riippuva. Muutoin $\bar{X}$ on äärettömänulotteinen

2.2.

Merk. $\dim \overline{X} = n$ jos löytyy joukko S, jossa on n lineaarisesti riippumatonta vektoria ja $\forall$ $n+1$:n vektorin joukko on lin. riippuva. Tällainen S on v.a:n $\overline{X}$ kanta.

Esim $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C[a,b]$

2.4. Määritelmä V.a:n $\overline{X}$ vektorialiavaruus on osajoukko $\emptyset \neq \overline{Y} \subset \overline{X}$ s.e. se on vakaa laskutoimitusten suhteen: $\forall$ $y_1, y_2 \in \overline{Y}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ pätee $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \overline{Y}$. Erityisesti siis $\overline{Y}$ itse on v.a.

Esim. $\overline{X} = C[a,b]$, $\overline{Y} = \{y \in C[a,b] \mid y(a) = y(b) = 0\}$

2.5. Määritelmä Osajoukon $S \subset \overline{X}$ virittämä vektorialiavaruus

span S = pienin $\overline{X}$:n v.a.a. joka sisältää joukon S.
= lineaaristen yhdistelmien $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ kokoelma, $x_k \in S$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Esim. $S = \{1, x, \dots x^m\} \subset C[a,b]$, merk lyhyesti

symbolilla x^k funktiota $x \mapsto x^k$, $x \in [a,b]$.
span S = enintään astetta m olevat polynomit.

2.6. Määritelmä Ol. $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ vektoriavaruuden $\overline{X}$ vektorialiavaruuksia. Jos $\forall$ $x \in \overline{X}$ on esitys $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \overline{X}_1$, $x_2 \in \overline{X}_2$ niin merk
$\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$ avaruuksien $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ summa
Jos esitys $x = x_1 + x_2$ 1-käsitteinen $\forall$ x niin
$\overline{X} = \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_2$ on avaruuksien $\overline{X}_1$ ja $\overline{X}_2$ suora summa

2.7. Lause Ol. $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ v.a:n $\overline{X}$ v.a.a ja $\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$.
Tällöin $\overline{X} = \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_2 \iff \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 = \{0\}$.

Tod: Os. ekvivalentisti $\overline{X} \neq \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_2 \iff \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \neq \{0\}$
"$\Rightarrow$" Ol. $\overline{X} \neq \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_2$ eli $\exists$ $x = x_1 + x_2 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$
s.e. $x_1 \neq \overline{x}_1$ tai $x_2 \neq \overline{x}_2$. $x_1, \overline{x}_1 \in \overline{X}_1$, $x_2, \overline{x}_2 \in \overline{X}_2$
$\Rightarrow$ $0 \neq x_1 - \overline{x}_1 = \overline{x}_2 - x_2 \in \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$.

"$\subset$=" Ol. $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2 \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ $\exists\ x_0 \in \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2$, $x_0 \neq 0$ (2.3)

$\Rightarrow$ $x = \underset{\in \mathbb{X}_1}{x_1} + \underset{\in \mathbb{X}_2}{x_2} = \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\in \mathbb{X}_1} + \underbrace{(x_2 + x_0)}_{\in \mathbb{X}_2}$ eri esitykset.

__Esim__ $C[-1,1] = \mathbb{X}_{odd} \oplus \mathbb{X}_{even}$, missä $\mathbb{X}_{odd}$ välin $[-1,1]$ parittomat jatkuvat funktiot ja $\mathbb{X}_{even}$ " parilliset "

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]}_{\in \mathbb{X}_{odd}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]}_{\in \mathbb{X}_{even}}$$

$y \in \mathbb{X}_{odd} \cap \mathbb{X}_{even}$ $\quad y(t) = y(-t) = -y(t) \Rightarrow y(t) \equiv 0$.

2.8. __Määritelmä__ Vektoriavaruuden $\mathbb{X}$ osajoukko C on __konveksi__ jos $\forall\ x, y \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$ pätee $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$

Osajoukon $S \subset \mathbb{X}$ __konveksi verho__

co S = pienin konveksi joukko $\subset \mathbb{X}$, joka sisältää joukon S.

= lineaaristen yhdisteiden $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ $x_k \in S$, $\lambda_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $n \in \mathbb{N}$ kokoelma.

3. Normiavaruudet ja Banach-avaruudet

3.1. Määritelmä Ol. $\overline{X}$ $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Kuvaus $p : \overline{X} \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ on $\overline{X}$:n normi jos pätee

(N1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\ x, y \in \overline{X}$ (Δ-ey)

(N2) $p(ax) = |a| p(x) \quad \forall\ x \in \overline{X},\ a \in \mathbb{K}$. (homogeenisuus)

(N3) $p(x) = 0 \iff x = 0$.

Merkitään: $p(x) = \|x\|$. Pari $(\overline{X}, \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

Normiavaruus $(\overline{X}, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus, jos se on täydellinen metrinen avaruus normin $\|\cdot\|$ indusoiman metriikan d suhteen: $d(x,y) := \|x-y\| \quad \forall\ x, y \in \overline{X}$.

3.2. Määritelmä Kuvaus $p : \overline{X} \to \mathbb{R}_+$ on vektoriavaruuden $\overline{X}$ puolinormi jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2). Tällöin $p(\bar{0}) = 0$: $p(\bar{0}) = p(0 \cdot \bar{0}) \overset{(2)}{=} 0 \cdot p(\bar{0}) = 0$ ja $\{x \in \overline{X} \mid p(x) = 0\}$ on jokin $\overline{X}$:n vektorialiavaruus.

3.3. Määritelmä Vektoriavaruuden $\overline{X}$ normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentit jos löytyy vakiot $c_1, c_2 > 0$ s.e. pätee

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\| \qquad \forall\ x \in \overline{X}.$$

Ekvivalentit normit määräävät samat avoimet, suljetut joukot, suppenemisen jne

Esimerkkejä: 1° $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ eri normeja:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

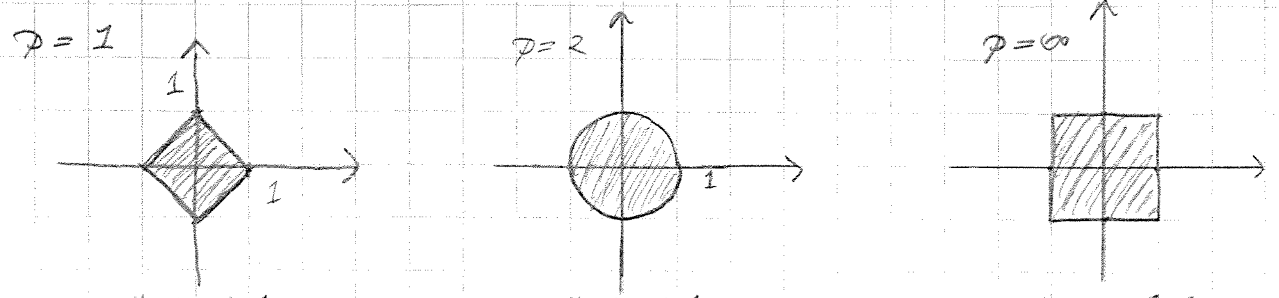
Δ-ey kun $1 < p < \infty$ = Minkowskin epäyhtälö

Normit ekvivalentteja (pian os.: äärellisulotteisen vektoriavaruuden kaikki normit ovat ekvivalentteja)

Pätee: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ (HT)

$\Rightarrow \|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$.

Yksikkökuula $\mathbb{R}^2$:issa: (3.2.)



$\|x\|_1 \le 1$ $\|x\|_2 \le 1$ $\|x\|_\infty \le 1$

tapaukset $p \in [3, \infty)$?

2° $\ell^p := \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \,/\, x_n \in \mathbb{K}, \|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty \}$ $p \in [1, \infty)$

$\ell^\infty := \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \,/\, x_n \in \mathbb{K}, \ \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \}$

<u>Huom</u> Vektorit $e_n = (0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots) \in \ell^p, \ell^\infty$ lin. riippumattomia $\Rightarrow$ $\dim(\ell^p) = \dim(\ell^\infty) = \infty$.

ℓ^1 on itseisesti (absoluuttisesti) suppenevien lukujonojen avaruus

ℓ^p $p \in (1, \infty)$ Δ-ey: Minkowskin ey.

ℓ^p ℓ^∞ epäekvivalentteja normeja (myös)

3° $C[a,b] = \{ x : [a,b] \to \mathbb{K} \,/\, x \text{ jatkuva} \}$

$\|x\|_\infty = \sup_{a \le t \le b} |x(t)| = \max_{a \le t \le b} |x(t)| < \infty$

$C^m[a,b] = \{ x \in [a,b] \to \mathbb{K} \,/\, x$ m kertaa jatkuvasti differentioituva (päätepisteissä toispuoleisesti) $\}$

$\|x\|_{C^m[a,b]} = \sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}\|_\infty$

4° $L^p(a,b) = \{ x \in (a,b) \to \mathbb{K} \,/\, x \text{ mitallinen} \}$ (Reaalianalyysi)

$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$ $1 \le p < \infty$

$\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{a < t < b} |x(t)| := \inf \{ M \,/\, \text{joukon } \{ t \in (a,b) \,/\, x(t) > M \} \text{ mitta} = 0 \}$

Oleellinen supremum

Δ-ey: Minkowskin ey

5^0 Sobolev avaruudet $W_p^m(a,b)$ $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$

$$\|x\|_{m,p} = \left(\sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}\|_p\right)^{1/p} \qquad 1 \le p < \infty$$

$$\|x\|_{m,\infty} = \sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}\|_\infty$$

6^0 Ol. $\Omega \subset \circ\, \mathbb{R}^n$ rast.

$$C(\overline{\Omega}), \quad L_p(\Omega), \quad C^m(\overline{\Omega}), \quad W_p^m(\Omega)$$

1^0–6^0 ovat Banach-avaruuksia.

Ol. $A \ne \emptyset$ joukko ja merk. $B(A,\mathbb{K}) = B(A) = \{x : A \to \mathbb{K} \mid x \text{ rajoitettu}\}$
$\forall\ x \in B(A)$ aset. : $\|x\|_\infty = \sup_{t \in A} |x(t)|$

3.4. Lause $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Tod:

Ol. (x_n) Cauchy-jono avaruudessa $B(A)$ ja $t \in A$. Pätee

(*) $|x_k(t) - x_j(t)| \le \|x_k - x_j\|_\infty < \varepsilon \quad \forall\ j,k \ge m_\varepsilon$.

Skalaarijono $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy $\mathbb{K}$:ssa.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ täydellinen $\Rightarrow$ $x_k(t) \to y(t)$ (pisteittäin) kun

$k \to \infty$ $\forall\ t \in A$, $\therefore$ saadaan rajafunktio $y : A \to \mathbb{K}$.

Riittää os. y:lle ominaisuudet (i) $y \in B(A)$ (ii) $\|x_n - y\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$

Ey (*) pätee tasaisesti $\forall\ t \in A$: Olk. ensin $k \ge m_\varepsilon$ ja $t \in A$ kiinteä. Kun $j \to \infty$ niin (*) $\Rightarrow$

$$\lim_{j \to \infty} |x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - y(t)| \qquad \text{(skalaareja!)}$$

$$\Rightarrow \quad |x_k(t) - y(t)| \le \varepsilon \quad \forall\ t \in A \text{ ja } k \ge m_\varepsilon \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \quad |y(t)| \overset{\Delta\text{-ey}}{\le} |y(t) - x_k(t)| + |x_k(t)| \le \varepsilon + \|x_k\|_\infty \quad \forall\ t \in A$$

$\Rightarrow$ (i).

$(**) \Rightarrow \quad \|x_k - y\|_\infty = \sup_{t\in A} |x_k(t) - y(t)| \le \varepsilon \quad \forall\, k \ge m_\varepsilon$

$\Rightarrow \quad x_k \to y \quad B(A)$:ssa $\quad \Rightarrow$ (ii) . $\square$.

3.5. Seuraus

(i) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|$, $\mathbb{K}^n = \{x=(x_1,\dots,x_n) : \{1,\dots,n\} \to \mathbb{K} \,/\, x(i) = x_i\}$
Banach

(ii) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$, $\ell^\infty = \{x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \,/\, x(i) = x_i,\ \sup_{i\in\mathbb{N}} x_i < \infty\}$
Banach

Esim $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ ei täydellinen

$\|(x_k)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

Olk. $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ kun $n \in \mathbb{N}$.

$x^{(n)} \in \ell^1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\forall\, n, p \in \mathbb{N}: \quad \|x^{(n)} - x^{(n+p)}\|_\infty = \|(\underbrace{0,\dots,0}_{n \text{ kpl}}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+p}, 0, \dots, 0)\|_\infty$

$= \sup_{n+1 \le j \le n+p} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} \to 0$ kun $n \to \infty$ eli $(x^{(n)})$ Cauchy.

Väite: $\nexists$ jonoa $y = (y_k) \in \ell^1$ s.e. $\|x^{(n)} - y\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$

VO: $\exists$ tällainen y. Tällöin jonolle $(x^{(n)})$ pätee

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad \text{joten} \quad \forall\, k:$$

$|x_k^{(n)} - y_k| \le \|x^{(n)} - y\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$.

Siis $y_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \frac{1}{k} \quad \forall\, k = 1, 2, \dots$

Toisaalta $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$ eli $y = ((\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}) \notin \ell^1$ ↯.

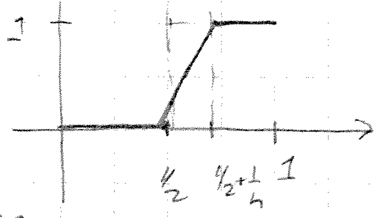
$\square$.

Huom. Vastaavasti nähdään, että jos $1 \le p < q < \infty$, niin (3.5.)

$\ell^p \subset \ell^q$ mutta $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen (HT)

Esim. $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ei täydellinen. Olk.

$$x_n: \; x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \le t \le 1 \\ nt - \frac{n}{2} & \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \end{cases}$$



$$\|x_m - x_n\|_1 \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{kun } m,n \to \infty$$

(x_n) Cauchy jono, mutta (x_n) suppenee kohti epäjatkuvaa funktiota $\Rightarrow \nexists$ rajafunktiota $x \in C[0,1]$ $\|\cdot\|_1$:ssa

Esim. $P = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \;/\; p \text{ polynomi}\}$ $(P, \|\cdot\|_\infty)$ ei täydellinen (tod. kuten esim. edell. sivulla)

Karakterisoidaan Banach-avaruuden vektorialiavaruuden täydellisyys.

3.6. Lause Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ Banach-avaruus ja $M \subset X$ suljettu vektori-aliavaruus. Tällöin $(M, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus.

Tod: Ol. $(x_n) \subset M$ Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) Cauchy X:ssä

X täydellinen $\Rightarrow$ $\exists\, y \in X$ $\|y - x_n\| \to 0$ kun $n \to 0$

M suljettu $\Rightarrow$ $y \in M$. $\square$.

Tämä on myös välttämätön ehto:

3.7. Lause Ol. X normiavaruus ja M sen täydellinen vektorialiavaruus. Tällöin M on suljettu X:ssä.

Tod: Ol. $z \in \overline{M} \Rightarrow \exists$ jono $(x_n) \subset M$ s.e. $\|x_n - z\| \to 0$

$\Rightarrow$ (x_n) Cauchy X:ssä ja siis myös M:ssä.

M täydellinen $\Rightarrow$ $\exists\, y \in M$ s.e. $\|x_n - y\| \to 0$.

Raja-arvon 1-käs $\Rightarrow$ $z = y \in M$. $\therefore \overline{M} = M$. $\square$.

Saatiin: Banach-avaruuden vektorialiavaruus on täydellinen joss se on suljettu.

13.9.

←