Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet — Harj. (7.)

Peltonen / Aalto — 16.11.2007

1) Osoita, että jos X ja Y ovat normiavaruuksia ja $A : X \to Y$ avoin lineaarikuvaus, niin A on surjektio.

2) Etsi epäjatkuva kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka graafi $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on suljettu.

3) Olkoon X vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sen normeja s.e. $(X, \|\cdot\|_i)$ on Banach-avaruus kun $i = 1,2$. Oletetaan, että löytyy $C > 0$ s.e. pätee $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentit.

4) Olkoon X Banach-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen kuvaus $X \to X$ s.e. $\|A\| < 1$. Osoita, että operaattori $I + A$ on kääntyvä ja $(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$ on normisuppeneva sarja s.e. $\|(I+A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

5) Olkoon X Banach-avaruus ja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jono kääntyviä operaattoreita $A_n \in \mathcal{L}(X)$ $n \in \mathbb{N}$ s.e. $A_n \to A \in \mathcal{L}(X)$ kun $n \to \infty$. Olkoot $\|A_n^{-1}\| < 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Osoita, että A on kääntyvä.

6) Olkoon X Banach-avaruus ja $B, B^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Osoita että jos $A \in \mathcal{L}(X)$ ja $\|A - B\| < 1/\|B^{-1}\|$ niin A on kääntyvä ja pätee

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| < \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|A-B\|\,\|B^{-1}\|}.$$

(Vihje: $A = ((A-B)B^{-1} + I)B$.)