Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 3. 5.10.2007

Pellonen / Aalto

1) Mitkä seuraavista Banach-avaruuden ℓ^∞ vektorialiavaruuksista ovat Banach-avaruuksia?

a) $c = \{x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty \mid x_n \in \mathbb{K},\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\}$

b) $c_0 = \{x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty \mid x_n \in \mathbb{K},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$

c) $S = \{x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n = 0\ \forall n \geq N\}$

2) Olkoon $\mathcal{P} = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n,\ x \in [0,1],\ a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$.
Ovatko normit $\|p\|_1 = \sup\{|p(x)| \mid x \in [0,1]\}$,
$\|p\|_2 = \int_0^1 |p(x)|\,dx$, $\|p\|_3 = \sup_{1\leq k\leq n} |a_k|$ ekvivalentteja?

3) Jos $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat normeja vektoriavaruudessa $\overline{X}$, niin onko myös $\|\cdot\|$: $\|x\| = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ aina normi?

4) Osoita, että edellisen viikon harj. 6 määritellyssä vektoriavaruudessa $L^{(p)}$ pätee Minkowskin epäyhtälö

$$\left(\int |f(x)+g(x)|^p d\lambda\right)^{1/p} \leq \left(\int |f(x)|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g(x)|^p d\lambda\right)^{1/p},$$

$p \in [1,\infty)$.

5) Sanotaan: funktiot $f, g \in L^{(p)}(\Omega)$ ovat ekvivalentit jos pätee $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin merk. $f \sim g$.
Asetetaan $[f] = \{g \in L^{(p)}(\Omega) \mid g \sim f\}$.

Osoita, että kokoelma $L^p(\Omega) := \{[f] \mid f \in L^{(p)}(\Omega)\}$ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_p$ sen normi:

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\lambda\right)^{1/p}$$