2.3. Korkeammat derivaatat. Palkin yhtälö

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\,dx \longrightarrow \text{stat}$$

Varioidaan

$$\tilde{y} = y + \varepsilon\eta$$

ja tutkitaan niitä samoin termeille tapauksen

$$f'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial y''}\eta'' \right) dx$$

$0 = f'(0)$ josta saadaan

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial y''}\eta'' \right) dx = 0 .$$

Termit jossa η:ta derivoidaan hävitetään osittaisintegroinnilla:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx$$

ja

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta' - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta'$$

$$= \Big|_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta' - \Big|_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta\,dx$$

Yhdistettynä siis

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx$$

$$+ \Big|_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta' + \Big|_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right)\right]\eta$$

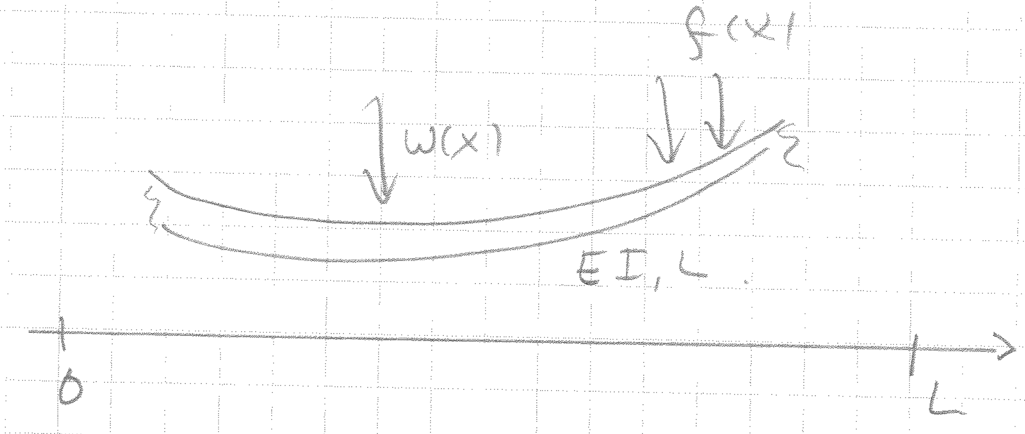
Saadaan siis <u>E.L. yhtälö</u>

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

ja kaksi reunaehtoa päätepisteissä x_1 & x_2, "Kinemaattiset" tai <u>"luonnolliset"</u>

<u>Kinemaattinen</u>	tai	<u>Luonnollinen</u>
$y(x_i) = 0$		$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]_{\mid x_i} = 0$
$y'(x_i) = 0$		$\frac{\partial F}{\partial y''}(x_i) = 0 .$

Esimerkki 1. Palkki



Energia

$$I(w) = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EI (w'')^2 - f w \right\} dx ,$$

Siis $F(x, w, w)$

$$= \frac{1}{2} EI (w')^2 - f w .$$

Eulerin yhtälö

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2}\right) - f = 0 .$$

Siis tulee palkkiyhtälö

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2}\right) = f .$$

Reunaehdot:

$w(x_i) = 0$ tai

$$\frac{\partial F}{\partial w'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = 0 \quad - (EI w'')' = 0 .$$

Siis leikkausvoima häviää.

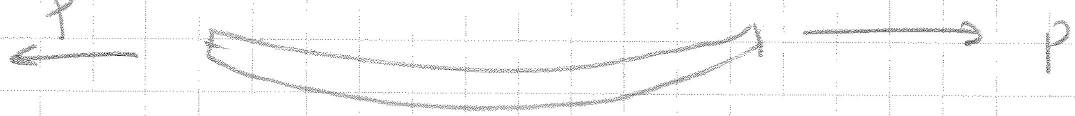
$w'(x_i) = 0$

tai luonnollinen ehto

$$0 = \frac{\partial F}{\partial w''} = EI\, w''(x_i)$$

Kiertymä tai momentti häviää.

<u>Esimerkki 2.</u> Palkkiin vaikuttaa vetovoima P.



Energia

$$I(w) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (w'')^2 + \frac{1}{2} P (w')^2 - f w\right] dx$$

Eulerin yhtälö:

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI\, w'') - \frac{d}{dx} P w' - f = 0 .$$

Siis

$$\underline{\underline{(EI\, w'')'' - P w'' = f .}}$$

Reunaehdot.

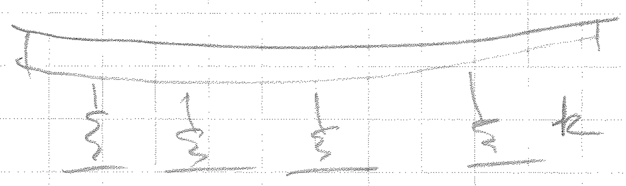
$w(x_i) = 0$ tai

$$0 = \frac{\partial F}{\partial w'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = P w' - \frac{d}{dx}(EI\, w'')$$

Siis $(EI\, w'')' - P w' = 0 .$

vrt. leikkausvoiman lauseke nurjahduksessa

<u>Esimerkki 3.</u> Kimmoisella alustalla oleva palkki.



Energia on nyt

$$I(w) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (w'')^2 + \frac{1}{2} k(w)^2 - fw\right] dx$$

E.L. yhtälö

$$(EI\,w'')'' + kw = f.$$

Sekä sauva, että palkki tehtävälle (ja niinkuin tulemme näkemään) variaatiotehtävä on minimointi tehtävä koska minimoitava funktionaali on kvadraattinen

<u>Sauva</u>

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2 dx - \int_0^L fu$$

$$f(\varepsilon) = I(u+\varepsilon v)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EA(u'+\varepsilon v')^2 dx - \int_0^L f(u+\varepsilon v)\, dx,$$

$$f'(\varepsilon) = \int_0^L EA(u'+\varepsilon v')v' \, dx - \int_0^L fv\, dx$$

$$0 = f'(0) = \int_0^L EAu'v' dx - \int_0^L fv\, dx.$$

$$f''(\varepsilon) = \int_0^L EA(v')^2 dx \geq 0.$$

$$f''(\varepsilon) = 0 \iff v'(x) \equiv 0.$$

$$\iff v(x) = \text{vakio}$$ ja

yhsi kinemaattinen reuna ehto, esim.

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0.$$

Kvadraattisen minimointitehtävän yleinen muoto (vrt. 1.171 FEM) yleinen muoto on seuraava

Tehtävä on asetettu Hilbert avaruudessa V ja etsitään $u \in V$ siten, että

$$I(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - l(v) \longrightarrow \min$$

missä l on jatkuva lineaarimuoto: on olemassa $c > 0$ s.e.

$$|l(v)| \leq C_1 \|v\|_V .$$

$a : V \times V \to \mathbb{R}$ on bilineaarinen, symmetrinen:

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u, v \in V,$$

ja positiivisesti definiitti V:ssä: on olemassa $C_2 > 0$ siten että

$$a(v,v) \geq C_2 \|v\|_V^2 .$$

ja jatkuva: $|a(v,u)| \leq C_3 \|v\|_V \|u\|_V$.

Näillä oletuksilla on helppo todeta (harj. teht.) että ääriarvo (jos olemassa) on todella minimi.

Elastisuusteoriassa tehtävä on yleensä helppo koska voidaan suoraan valita / määritellä

$$\|v\|_V^2 = |||v|||^2 = a(v,v)$$

luvallisten funktioiden luokka

haoffaan niistä siirtymistä joiden

kimmoinen energia on äärellinen.

Esim. Sauva

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2\,dx - \int_0^L fv\,dx,$$

Siis

$$a(u,v) = \int_0^L EA\,u'v'\,dx$$

$$l(v) = \int_0^L fv\,dx.$$

Reunaehdot $u(0) = u(L) = 0$.

Energianormi

$$|||v|||^2 = \int_0^L EA(v')^2\,dx.$$

Jos $0 < c_2 \le EA \le c_3$

niin normi on ekvivalentti $H^1(0,L)$

seminormin kanssa

$$c_2\int_0^L (v')^2\,dx \le \int_0^L (EA)(x)[v'(x)]^2\,dx$$

$$\le c_3\int_0^L [v'(x)]^2\,dx = c_3|v|_1^2$$

Poincarén epäyhtälön nojalla H^1-seminormi on tämän ekvivalentti $H^1(0,L)$:n normin

$$\|v\|_1^2 = \int_0^L [v^2 + (v')^2]\,dx$$

kanssa.

Huom. Variaatiotehtävä on aidosti differentiaaliyhtälön ym. yleistys.

Esimerkiksi jos

$$EA = \begin{cases} (EA)_- & 0 < x < L/2 \\ (EA)_+ & L/2 < x < L. \end{cases}$$

Niin "Euler-Lagrange" yhtälöstä tulee

$$\int_0^L EA\,u'v'\,dx = \int_0^{L/2} EA\,u'v'\,dx$$

$$+ \int_{L/2}^L EA\,u'v'\,dx$$

$$= \Big|_0^{L/2} (EA)_- u'v - \int_0^{L/2} (EA)_- u''v\,dx$$

$$+ \Big|_{L/2}^L (EA)_+ u'v - \int_{L/2}^L (EA)_+ u''v\,dx$$

$$= \left[EA_- u'(L/2-) - (EA)_+ u'(L/2+) \right] v(L/2)$$

$+ \ldots$

Pisteessä $L/2$ saadaan siis

voima tasapaino:

$$(EA)_- u'(L/2-) = (EA)_+ u'(L/2+) .$$

Toinen esimerkki. Pistekuorma F

Energia: $F v(L/2)$ eli f

on $F \delta (x - L/2)$,

δ = Dirac'in funktio.

Siis

$$\int_0^L f v \, dx = \int_0^L F \delta (x - L/2) v \, dx$$

$$= F \int_0^L \delta (x - L/2) v(x) \, dx$$

$$= F v(L/2) .$$

Differentiaaliyhtälö olisi siis jotenkin muotoa

$$(EAu')' + F \delta (x - L/2) = 0 . \quad ?$$

Variaatiosta saa

$$(EAu')' = 0 \qquad 0 < x < L/2$$

$$(EAu')(L/2-) + F = (EAu')(L/2+),$$

Oleellista tässä tehtävässä on, että lineaarifunktionaali on jatkuva. Sobolevin epäyhtälön nojalla näin on.