Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531) Harj. 9.

Peltonen / Dahl 31.3.200

1) Osoita, että kuvaus $f : SU(n) \times U(1) \to U(n)$
$f(A,(\lambda)) := \lambda \cdot A$ on n-kertainen peitekuvaus (lokaali diffeomorfismi) ja homomorfismi.

2) Osoita, että kuvaus $g : SU(n) \times U(1) \to U(n)$

$$g(A,(\lambda)) := \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ A_{21} & & & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

on homeomorfismi, mutta ei homomorfismi.

3) Todista luennolla esitetyn lauseen 9.2.3. kohdat (1), (2), (4) ja (5).

4) Osoita, että $SO(3)$:n standardi maksimaalinen torus on myös $GL_3(\mathbb{R})$:n maksimaalinen torus. Peittävätkö maksimaalisen toruksen konjugaatit koko $GL_3(\mathbb{R})$:n?

5) Olkoot T_1 ja T_2 matriisiryhmien G_1 ja G_2 maksimaaliset torukset. Osoita, että $T_1 \times T_2$ on matriisiryhmän $G_1 \times G_2$ maksimaalinen torus.

6) Käyttäen maksimaalisia toruksia todista lyhyesti, että kaikilla $A \in \mathfrak{u}(n)$ pätee

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{trace} A}$$

(Erikoistapaus lemmasta 6.3.5)